

Unit Hydrograph Extraction Using Probability Density Functions (Case Study: Samian Watershed)

S. Rezaei Ghasem Gheshlaghi¹, M. Hasanpour Kashani^{1*}, M.R. Nikpour¹

1- Department of Water Engineering, Faculty of Agriculture and Natural Resources, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil, Iran

(*- Corresponding Author Email: m.hkashani@uma.ac.ir)

Received: 25 July 2026

Revised: 17 August 2026

Accepted: 08 September 2026

Available Online: 08 September 2026

How to cite this article:

Rezaei Ghasem Gheshlaghi, S., Hasanpour Kashani, M., & Nikpour, M.R. (2026). Unit hydrograph extraction using probability density functions (case study: Samian Watershed). *Journal of Soil and Water*, 40(3), 309-323. (In Persian).
<https://doi.org/10.22067/jsw.2026.100040.1572>

Introduction

A large amount of precipitation is lost annually. Therefore, studying the precipitation-runoff process and predicting runoff are essential in water resources studies and plans, as well as in water engineering discussions. Thus, choosing a model that can predict runoff from rainfall with acceptable accuracy using effective factors seems essential. The aim of this research is to estimate the components of unit hydrographs resulting from several precipitation-runoff events in the Samian Watershed located in Ardabil Province using a nonlinear optimization method along with the application of probability distribution functions.

Materials and Methods

In order to determine the optimal values of the distribution function parameters, the objective function is considered as minimizing the sum of the squares of the deviation between the predicted and actual direct runoff hydrographs. The values of the probability distribution functions parameters are optimized using Mathematica software and nonlinear programming method. Finally, the direct runoff hydrographs are calculated using the effective rainfall hydrographs and the corresponding unit hydrographs, and then compared with the observed direct runoff hydrographs. The performance criteria of mean square error, mean absolute error, and correlation coefficient are used to examine the ability of the functions in the calibration and testing stages. The classical least squares method is also used to extract the unit hydrographs and its efficiency is compared with the results of the nonlinear optimization model.

Results and Discussion

In the calibration period, for the first event, the Root Mean Square Error (RMSE) and Mean Absolute Error (MAE) of the Gumbel (0.0048 and 0.0042) and Nakagami (0.0134 and 0.0095) functions are higher and their Correlation Coefficients (CC) (0.935 and 0.237, respectively) are also lower than those of the other functions. The lowest errors (0.0021 and 0.0016) and the highest correlation coefficient (0.978) are related to the lognormal distribution. The weakest distribution is the Nakagami distribution with RMSE equal to 0.0134, MAE equal to 0.0095, and CC equal to 0.237. In the case of the second event, the RMSE and MAE errors of the Gumbel (0.0110 and 0.0070) and Nakagami (0.0223 and 0.0293) functions are higher and their correlation coefficients (0.682 and -0.087) are also lower than the other functions. The lowest errors (0.0068 and 0.0056) and the highest correlation coefficient (0.874) are related to the lognormal distribution. The weakest distribution is the Nakagami distribution with RMSE of 0.0223, MAE of 0.0293, and CC of -0.087. In the case of the third event, the performance of all functions is satisfactory due to very low RMSE and MAE values and very high correlation coefficient. However, the errors of the gamma and lognormal functions are slightly higher than the others. Also, Weibull and normal



Authors retain the copyright. This is an open access article distributed under [Creative Commons Attribution 4.0 International License \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

<https://doi.org/10.22067/jsw.2026.100040.1572>

distributions show better performance than other distributions based on the values of performance criteria because these distributions show high ability in predicting the ascending and descending branches of the unit hydrograph.

In the test period, considering the average values of the performance functions of the distributions in each event, it can be said that the lognormal distributions (with average RMSE and MAE errors of 0.0134 and 0.01115 and average correlation coefficient of 0.823) and the normal distributions (with average RMSE and MAE errors of 0.0142 and 0.01275 and average correlation coefficient of 0.739) have higher potential in estimating the unit hydrographs of the basin, respectively. The errors of Pearson and Nakagami distributions in both events were higher than the other distributions. The least squares method also had better performance criteria values than all distributions in both events.

Conclusion

In general, according to the results obtained in the calibration and testing periods, it can be concluded that the lognormal distribution is the best distribution for estimating and calculating unit hydrographs (especially in estimating the ascending branch and peak time and discharge) in the Samian Basin. Also, the Pearson and Nakagami functions are among the weakest distributions in estimating the hydrographs of that basin. The least squares method, regardless of its shortcomings, is among the appropriate methods in estimating the unit hydrograph.

Keywords: Least squares, Mathematica software, Nonlinear optimization, Rainfall-runoff event, Unit hydrograph

استخراج هیدروگراف واحد با استفاده از توابع چگالی احتمال (مطالعه موردی: حوضه آبریز سامیان)

سالار رضائی قاسم‌قشلاقی^۱ - مهسا حسنیپور کاشانی^{۱*} - محمدرضا نیک‌پور^۱ 

تاریخ دریافت: ۱۴۰۵/۰۵/۰۳

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۶/۱۷

چکیده

هدف از این تحقیق، برآورد مؤلفه‌های هیدروگراف‌های واحد حاصل از چند رویداد بارش-رواناب در حوضه آبریز سامیان واقع در استان اردبیل با استفاده از روش بهینه‌سازی غیرخطی همراه با کاربرد توابع توزیع احتمال می‌باشد. به‌منظور تعیین بهینه مقادیر پارامترهای توابع توزیع، از نرم‌افزار Mathematica و روش برنامه‌ریزی غیرخطی استفاده شد. در نهایت، هیدروگراف‌های رواناب مستقیم با استفاده از هیدروگراف‌های بارش مؤثر و هیدروگراف‌های واحد متناظر، محاسبه شده و با هیدروگراف‌های رواناب مستقیم مشاهده‌ای مقایسه شدند. از معیارهای عملکرد ریشه میانگین مربعات خطا (RMSE)، میانگین خطای مطلق (MAE) و ضریب همبستگی (CC) برای بررسی توانایی توابع احتمال استفاده شد. روش کلاسیک حداقل مربعات نیز برای استخراج هیدروگراف‌های واحد استفاده شده و کارایی آن با نتایج مدل بهینه‌سازی غیرخطی مقایسه می‌شود. نتایج نشان داد که در دوره آزمون، با در نظر گرفتن مقادیر متوسط توابع عملکرد توزیع‌ها در هر رویداد، توزیع‌های لوگ نرمال (با متوسط خطای RMSE و MAE برابر ۰/۱۳۴ و ۰/۱۱۱۵ و متوسط CC برابر ۰/۸۲۳) و توزیع نرمال (با متوسط خطای RMSE و MAE برابر ۰/۱۴۲ و ۰/۱۲۷۵ و متوسط CC برابر ۰/۷۳۹) به ترتیب دارای پتانسیل بالا در تخمین هیدروگراف‌های واحد حوضه می‌باشند. خطاهای توزیع‌های پیرسون و ناکاگامی در هر دو رویداد بیشتر از بقیه توزیع‌ها بود. روش حداقل مربعات نیز مقادیر معیارهای عملکرد بهتری از همه توزیع‌ها در هر دو رویداد نشان داد. بطور کلی، می‌توان نتیجه گرفت که توزیع لوگ نرمال بهترین توزیع برای برآورد هیدروگراف‌های واحد (به‌ویژه در برآورد شاخه بالارونده و زمان و دبی اوج) در حوضه آبریز سامیان می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی غیرخطی، حداقل مربعات، رویداد بارش-رواناب، نرم‌افزار Mathematica، هیدروگراف واحد

مقدمه

بین پدیده بارش و رواناب رابطه غیرخطی حاکم بوده و خصوصیات فیزیوگرافی و اقلیمی حوضه آبریز نیز بر روی این رابطه بسیار تأثیرگذار است، از این‌رو، پیش‌بینی رواناب (سیلاب) یک مسأله پیچیده‌ای می‌باشد. لذا، انتخاب مدلی که بتواند با استفاده از عوامل تأثیرگذار، رواناب حاصل از بارندگی را با دقت قابل قبولی پیش‌بینی کند، امر مهمی به نظر می‌رسد.

هیدروگراف واحد یک نوع تابع تبدیل برای مدل‌سازی فرآیند بارش-رواناب است و می‌توان آن را به‌عنوان تابع پاسخ ضربه واحد یک

ایران با میانگین بارش سالانه حدود ۲۲۰ میلی‌متر از جمله کشورهای خشک دنیا محسوب می‌شود که سالانه مقدار زیادی از این بارش نیز از دسترس خارج می‌شود. از این‌رو، مطالعه فرآیند بارش-رواناب و پیش‌بینی رواناب جزو موارد ضروری در مطالعات و طرح‌های منابع و مهندسی آب می‌باشد. پیش‌بینی رواناب می‌تواند در مدیریت صحیح طرح‌های کشاورزی، بهره‌برداری از مخازن سدها، سیستم هشداردهنده سیل و کاهش خسارات ناشی از سیلاب حائز اهمیت باشد.

۱- گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی و منابع طبیعی، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران

(*) نویسنده مسئول: (Email: m.hkashani@uma.ac.ir)

سیستم خطی تعریف نمود. بررسی هیدروگراف واحد حوضه، امکان محاسبه دبی حداکثر سیلاب، حجم سیلاب، ذخیره حوضه، فرسایش خاک، انجام روندیابی رودخانه و مخزن، طراحی ابعاد سازه‌های آبی مانند سرریز سدها، کانال‌های فاضلاب‌رو، سازه‌های مهار سیلاب و نیز محاسبه میزان تأثیر ساماندهی و اصلاح آبراهه‌ها به منظور کنترل سیل روی پاسخ حوضه را فراهم می‌آورد (Mahdavi, 2002). کاربرد مهم هیدروگراف واحد، برآورد هیدروگراف رواناب مستقیم از هیتوگراف بارش مازاد است. محققان زیادی با استفاده از روابط پیچشی اقدام به تهیه هیدروگراف واحد می‌کنند. این روابط شامل روش تقریب‌های متوالی، حداقل مربعات و روش بهینه‌سازی برنامه‌ریزی خطی و غیرخطی می‌باشد. ایراد این روش‌ها این است که در آنها تعداد مجهولات مسأله برابر با تعداد مؤلفه‌های هیدروگراف واحد است که در صورت بزرگ بودن زمان پایه هیدروگراف، استفاده از این روش‌ها به دلیل افزایش تعداد مجهولات مسأله (مؤلفه‌های هیدروگراف واحد) مشکل خواهد بود. بمنظور حل این مشکل، امروزه استفاده از توابع توزیع احتمالاتی در رابطه پیچشی به جای هیدروگراف واحد توجه بسیاری از محققین را به خود جلب کرده است. توابع توزیع احتمالاتی ویژگی‌های مشترکی با هیدروگراف‌های واحد دارند از جمله اینکه سطح زیر منحنی در آنها برابر واحد بوده و نیز نوسانات و مؤلفه‌های آنها همواره مثبت می‌باشد. بنابراین، این روش هیچ‌گونه محدودیت کاربردی ندارد. مزیت روش مذکور این است که در آن تعداد مجهولات برابر تعداد پارامترهای توزیع احتمالاتی است و به تعداد نوسانات یا مؤلفه‌های هیدروگراف رواناب مستقیم بستگی ندارد (Bhattacharjiya, 2004). در این خصوص نیز مطالعات گسترده‌ای انجام یافته است.

اورتن (Overton, 1968) از روش حداقل مربعات برای تعیین هیدروگراف‌های واحد از رگبارهای مرکب در پنج حوضه استفاده نمود. نتایج نشان دادند که کارایی این روش در چهار حوضه کوچک قابل قبول بوده ولی در حوضه پنجم، نوسانات زیادی در مؤلفه‌های هیدروگراف‌های واحد محاسبه شده نشان داد. دوگ و گاروی (Dooge & Garvey, 1970) چهار روش تحلیل هارمونیک، چندجمله‌ای میکسرن، حداقل مربعات و مدل‌های ناش را مقایسه کرده و نتیجه گرفتند که روش حداقل مربعات برای داده‌های بدون خطا بهترین و در حالتی که در داده‌ها خطا وجود دارد، بدترین روش است. پراساد و همکاران (Prasad et al., 1999)، با استفاده از مدل برنامه‌ریزی خطی، تئوری هیدروگراف واحد و تئوری نفوذ به برآورد بهینه میزان تلفات باران و هیدروگراف واحد حوضه‌های ویلزکریک و شوال کریک پرداختند و نتایج حاصل را با مدل برنامه‌ریزی غیرخطی مقایسه کردند. نتایج بیان‌گر توانایی بالای مدل خطی بود. باتاچارجیا (Bhattacharjiya, 2004)، با استفاده از برخی توابع توزیع احتمال مختلف نظیر توزیع گاما و توزیع لوگ نرمال در رابطه پیچشی بارش-رواناب در حوضه رودخانه پوتوماک شمالی مدل بهینه‌سازی غیرخطی

را توسعه دادند و با استفاده از الگوریتم ژنتیک نیز پارامترهای بهینه توزیع‌ها را محاسبه نموده و نتایج را با مدل برنامه‌ریزی خطی و غیرخطی کلاسیک مقایسه کردند. نتایج عملکرد خوب مدل‌های برنامه-ریزی خطی و غیرخطی کلاسیک را نسبت به توزیع‌ها نشان داد. با این حال، نتایج توزیع‌های گاما و لوگ نرمال قابل مقایسه با نتایج دو مدل مذکور بود که دلیل کمتر بودن تعداد پارامترهای قابل محاسبه آنها و تعداد محدودیت‌ها، توزیع گاما را برای برآورد سریع هیدروگراف واحد آن حوضه پیشنهاد نمودند. صادقی طیس و همکاران (Sadeghi Tabas et al., 2014)، توانایی الگوریتم‌های هوشمند بهینه‌سازی ازدحام ذرات، تکامل تصادفی جوامع، ترکیب الگوریتم ژنتیک و ازدحام ذرات و جهش ترکیبی قورباغه را در تهیه بهینه هیدروگراف واحد با استفاده از توابع توزیع احتمال گاما، لوگ نرمال و معکوس گاوس در حوضه آبریز کامه بررسی نمودند. با توجه به نتایج، تابع توزیع لوگ نرمال کارایی زیادی نسبت به بقیه توابع توزیع در شکل و دبی اوج هیدروگراف داشت. همچنین، الگوریتم‌های ازدحام ذرات و ژنتیک دقت بالاتری نسبت به سایر الگوریتم‌ها در واسنجی توابع توزیع احتمال نشان دادند. قربانی و همکاران (Ghorbani et al., 2017)، یک مدل بهینه‌سازی غیرخطی برای تبدیل هیدروگراف واحد به یک تابع احتمال توسعه دادند و پتانسیل شش تابع گامای دو پارامتری، گامیل دو پارامتری، نرمال و لوگ نرمال دو پارامتری، پیرسون سه پارامتری و ویبول دو پارامتری را در حوضه آبریز لیقوان در ایران بررسی کردند. پارامترهای توزیع احتمال با استفاده از روش بهینه‌سازی حداقل مربعات غیرخطی به دو روش تعیین شدند: (۱) بهینه‌سازی با برنامه‌نویسی در محیط ممتیکا و (۲) بهینه‌سازی با استفاده از الگوریتم ژنتیک. در نهایت، نتایج با نتایج به دست آمده با روش حداقل مربعات خطی کلاسیک مقایسه شدند. نتایج نشان‌دهنده قابلیت و عملکرد قابل مقایسه دو روش غیرخطی بود. توزیع گاما و پیرسون بهترین توزیع‌ها در حفظ مؤلفه‌های بالارونده و پایین-رونده هیدروگراف‌های واحد بودند. توزیع لوگ نرمال توانایی بالایی در پیش‌بینی جریان پیک و زمان پیک هیدروگراف واحد نشان داد. همچنین، روش بهینه‌سازی غیرخطی از روش حداقل مربعات خطی بهتر عمل نکرد اما قابل مقایسه بود. نقیبی و همکاران (Naghbi et al., 2018)، توانایی توابع احتمالاتی گاما، بتا، کای اسکوتر و ویبول را برای استخراج هیدروگراف سیل در ایران با استفاده از ۱۴ رویداد بارش-رواناب بررسی نمودند. در نهایت، مشخص گردید که سه توزیع گاما، کای اسکوتر و ویبول در پیش‌بینی دبی اوج عملکرد رضایت‌بخشی داشتند. در تخمین زمان اوج نیز سه توزیع گاما، کای اسکوتر و بتا نتایج خوبی نشان دادند. بطور کلی، توزیع گاما نسبت به بقیه توابع عملکرد موفقیت‌آمیزی در استخراج هیدروگراف سیل نشان داد. لی و کیدان (Li & Cidan, 2020)، به استخراج هیدروگراف واحد با استفاده از تابع احتمال گاما و بهینه‌سازی پارامترهای آن با استفاده از الگوریتم ژنتیک در دو حوضه پرداختند و در نهایت با استفاده از روش تکرار کولینس

همراه با دره‌رود به رود مرزی ارس و سپس به دریاچه خزر می‌ریزد. طول آبراهه اصلی این رودخانه برابر ۲۸۵ کیلومتر و با آبدهی سالانه ۵۵۴ میلیون متر مکعب در خروجی حوضه از پرآب‌ترین رودخانه استان اردبیل می‌باشد. طول آبراهه اصلی واقع در حوضه آبریز سامیان نیز حدود ۱۰۴ کیلومتر می‌باشد.

در این مطالعه داده‌های هیدرومتئورولوژی شامل دبی و بارش در مقیاس ساعتی مربوط به پنج رویداد بارش-رواناب از ایستگاه سامیان طی سال‌های ۱۳۷۳-۱۳۷۴ مورد استفاده قرار گرفتند که این داده‌ها از شرکت آب منطقه‌ای استان اردبیل اخذ شدند. سپس، هیتوگراف‌های بارش مازاد و هیدروگراف‌های رواناب مستقیم آن‌ها محاسبه گردید (شکل ۲). با توجه به شکل ۲، در شاخه پایین‌رونده همه هیدروگراف‌ها غیر از هیدروگراف مربوط به ۴ خرداد نوساناتی مشاهده می‌شود که می‌تواند به دلیل خطای اندازه‌گیری داده‌های بارش-رواناب آن رویدادها، خطای جداسازی جریان پایه، و یا یکنواخت نبودن بارش در مکان و زمان باشد.

روش حداقل مربعات

روش حداقل مربعات بر مبنای کمینه نمودن مجموع مربعات تفاضل‌های بین مقادیر هیدروگراف مشاهده شده و هیدروگراف محاسبه شده برای هر هیدروگراف واحد لحظه‌ای است. این روش اولین بار توسط اشنايدر (Snyder, 1955; Snyder, 1961) مورد استفاده قرار گرفته و از آن پس محققان متعددی از آن استفاده کردند (Ramaseshan et al., 1973; Mays & Coles, 1980; Singh, 1982). با استفاده از روش اشنايدر می‌توان معادله پیچشی را به شکل ماتریسی نوشت:

$$[Q] = [I][h] \quad (1)$$

که در آن، ماتریس Q مؤلفه‌های هیدروگراف رواناب مستقیم (میلی متر بر ساعت)، I مؤلفه‌های هیتوگراف بارش مازاد (میلی متر) و h مؤلفه‌های هیدروگراف واحد (میلی متر بر ساعت بر میلی متر) می‌باشد. شکل گسترده معادله فوق را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$(2)$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_p \end{bmatrix}_{p \times 1} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ I_2 & I_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_{n-1} & \dots & I_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & I_m \end{bmatrix}_{p \times n} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

که در آن، n تعداد مؤلفه‌های هیدروگراف واحد، m تعداد مؤلفه‌های بارش مازاد و p تعداد مؤلفه‌های هیدروگراف رواناب مستقیم است که رابطه $p = m + n - 1$ بین آنها برقرار می‌باشد. با توجه به سیستم فوق، ملاحظه می‌شود که $m + n - 1$ معادله برای محاسبه n مجهول وجود دارد. بنابراین، تعداد معادلات اضافی $m - 1$ است. از روش حداقل مربعات

مؤلفه‌های هیدروگراف واحد را محاسبه کردند. نتایج حاصل، عملکرد و دقت بالای روش بکار برده شده را نشان داد.

با توجه به مطالعات بیان شده، می‌توان دریافت که مطالعات نسبتاً کمی در رابطه با کاربرد توزیع‌های احتمالاتی برای برآورد هیدروگراف واحد صورت گرفته است. همچنین، نتایج رضایت‌بخشی از استفاده از این توابع در مطالعات انجام شده حاصل گردیده است. بنابراین، در این پژوهش نیز از توابع احتمالاتی آماری نظیر توزیع نرمال، لوگ نرمال و غیره در برآورد و تعیین هیدروگراف‌های واحد حوضه آبریز سامیان اردبیل استفاده می‌شود. در واقع، نوآوری پژوهش حاضر در به‌کارگیری توابع چگالی احتمال در چارچوب یک مدل برنامه‌ریزی غیرخطی برای استخراج هیدروگراف واحد و تعیین پارامترهای بهینه توابع توزیع، با استفاده از داده‌های بارش-رواناب حوضه آبریز سامیان است. در این روش، پارامترهای توابع توزیع با حل یک مسئله بهینه‌سازی غیرخطی تعیین شده و عملکرد توابع مختلف با روش کلاسیک حداقل مربعات مقایسه می‌شود.

با وجود مزایای روش پیشنهادی، پژوهش حاضر با محدودیت‌هایی نیز همراه است. از جمله محدودیت‌های این پژوهش می‌توان به محدود بودن تعداد رویدادهای بارش-رواناب با داده‌های تاریخی قابل اعتماد در حوضه مورد مطالعه و تأثیر خطاهای احتمالی اندازه‌گیری بارش و رواناب و جداسازی جریان پایه بر استخراج هیدروگراف واحد اشاره کرد. همچنین، نتایج حاصل از کاربرد توابع توزیع احتمال در این پژوهش به شرایط حوضه آبریز سامیان وابسته بوده و تعمیم آن به سایر حوضه‌ها نیازمند بررسی و ارزیابی بیشتر است.

مواد و روش‌ها

منطقه مورد مطالعه

حوضه آبریز سامیان یکی از زیرحوضه‌های حوضه آبریز قره‌سو (دره‌رود) است که شامل مرکز استان اردبیل و شهرستان‌های مهم آن یعنی نمین، نیر و سرعین می‌باشد. خروجی این حوضه در شمال شرقی حوضه و در نزدیکی روستای سامیان است که ایستگاه هیدرومتری سامیان در آن‌جا واقع شده است. محدوده مطالعاتی در بالادست رودخانه قره‌سو قرار دارد که از غرب به دامنه‌های کوه سبلان و از شرق به ارتفاعات مشرف به استان گیلان محدود می‌شود. این منطقه از لحاظ طول و عرض جغرافیایی محدود به مختصات $37^{\circ}55'$ تا $39^{\circ}00'$ طول شرقی و $47^{\circ}50'$ تا $48^{\circ}55'$ عرض شمالی است. مساحت حوضه آبریز سامیان حدود 4004 کیلومتر مربع است و حداقل و حداکثر ارتفاع آن برابر با 1290 و 4790 متر از سطح دریا می‌باشد. (شکل ۱). رودخانه قره‌سو از شاخه‌های اصلی رود ارس می‌باشد که از ارتفاعات تالش سرچشمه گرفته و در مسیر خود با عبور از دشت اردبیل، آب‌های جاری این منطقه از جمله بالیخی‌چای را جمع‌آوری نموده و

برای کاهش تعداد معادلات به n و حصول یک $[h]$ پایدار می‌توان استفاده کرد (Najafi, 2002). در نهایت، ماتریس $[h]$ بدست می‌آید:

$$[h] = [I]^T [I]^{-1} [I]^T [Q] \quad (3)$$

مدل برنامه‌ریزی غیرخطی

در این پژوهش، از توابع چگالی احتمال برای استخراج هیدروگراف واحد استفاده می‌گردد. در این صورت، با وارد کردن معادلات توابع چگالی احتمال در معادله پیچشی (۱)، تابع هدف مساله، غیرخطی می‌شود و در نتیجه مساله بهینه‌سازی به یک مساله غیرخطی تبدیل می‌گردد. تابع هدف (E) در اینجا نیز حداقل کردن جمع مربعات خطای بین هیدروگراف‌های رواناب مستقیم مشاهداتی و برآورد شده تعریف می‌شود:

$$E = \sum_{i=1}^p e_i^2 \quad (4)$$

$$e_i = Q_i - \sum_{m=1}^{i \geq m} I_m h_{i-m+1} \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (5)$$

که در آن، e_i خطای بین i امین مؤلفه هیدروگراف‌های رواناب مستقیم مشاهداتی و برآورد شده، Q_i i امین مؤلفه هیدروگراف‌های رواناب مستقیم مشاهداتی، I_m m امین پالس بارش مازاد و $f(x) =$

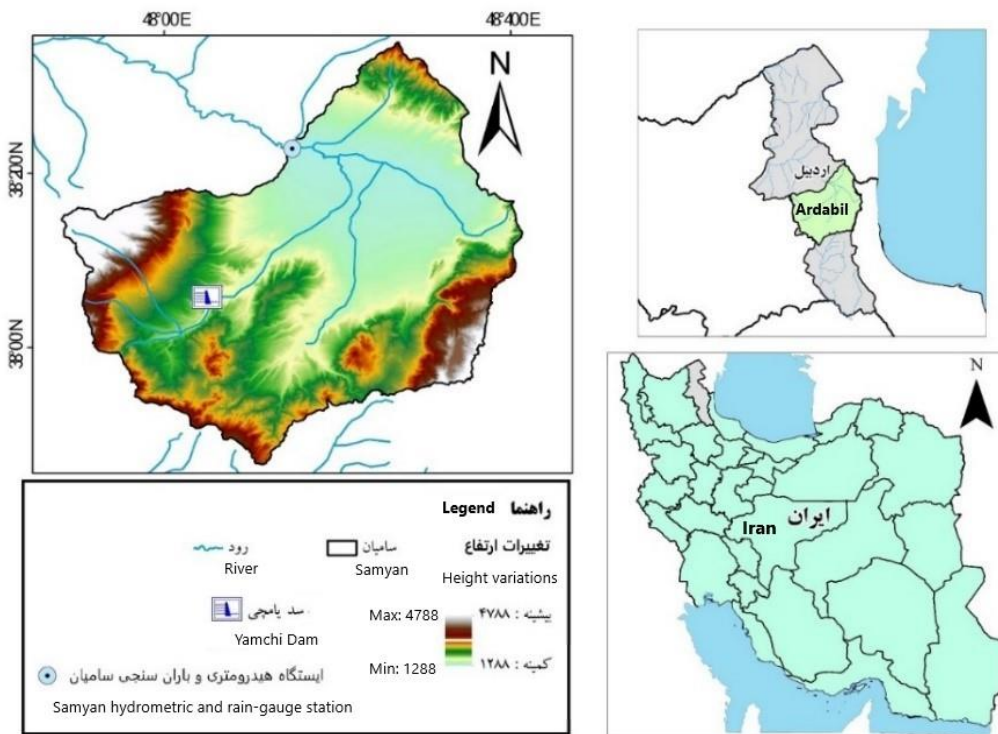
$$1 - \Delta t \sum_{i=1}^{p-m+1} h_i = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, p - m + 1 \quad (6)$$

$$h_i \geq 0$$

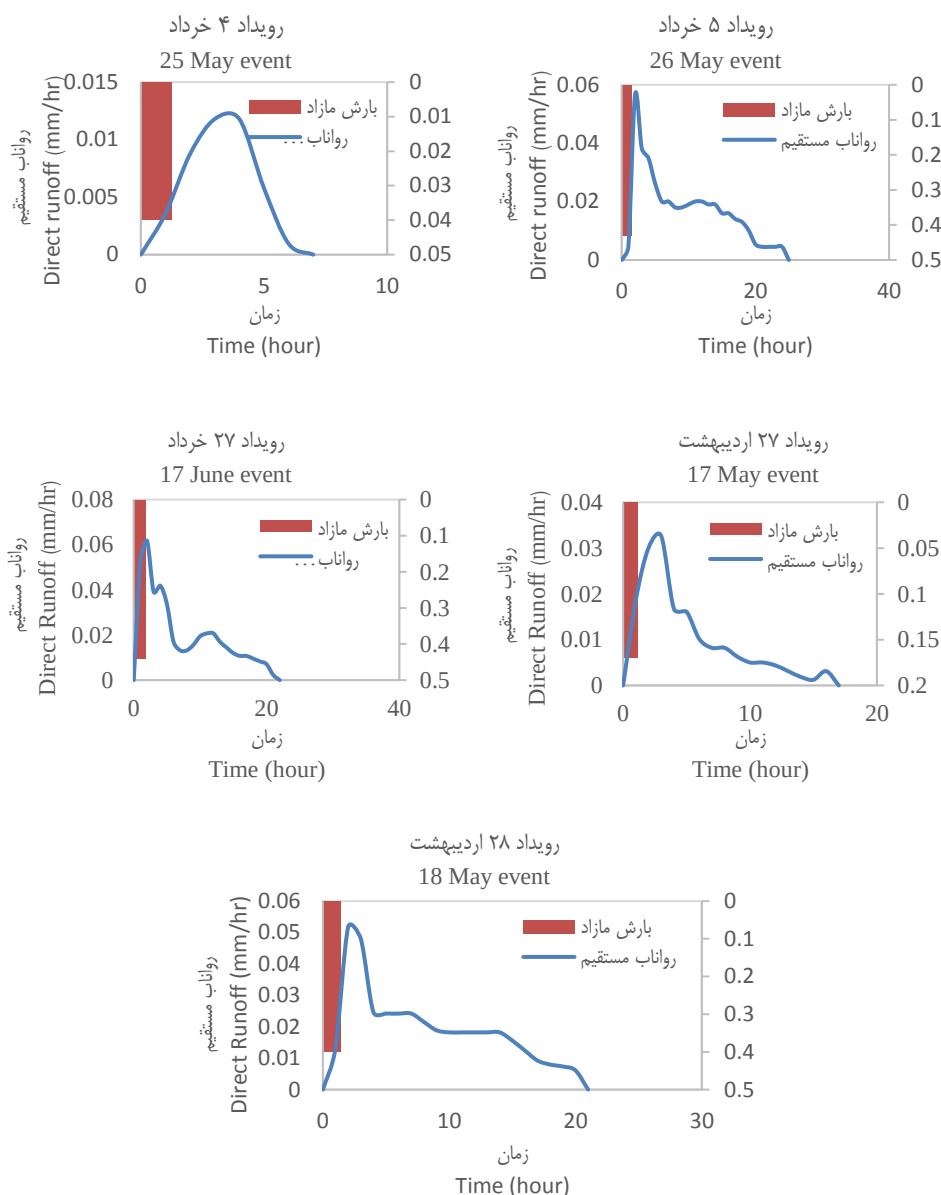
در این روش، تعداد مجهولات برابر تعداد پارامترهای توابع توزیع احتمالاتی مربوطه می‌باشد.

توابع توزیع احتمالاتی

به دلیل تشابهات متعدد توزیع‌های احتمالاتی با خصوصیات هیدروگراف واحد، استفاده از توابع توزیع احتمالاتی در توسعه هیدروگراف واحد حوضه گسترش زیادی پیدا کرده است. انتخاب توابع توزیع احتمال مورد استفاده در این پژوهش بر اساس مطالعات پیشین در زمینه کاربرد توابع توزیع احتمال در استخراج هیدروگراف واحد انجام شد. در جدول ۱، به معرفی توابع توزیع‌های احتمال بکار رفته در این تحقیق پرداخته شده است.



شکل ۱- موقعیت منطقه مورد مطالعه
Figure 1- Location of the study area



شکل ۲- رویدادهای بارش-رواناب سال آبی ۱۳۷۴-۱۳۷۳ حوضه آبریز سامیان
Figure 2- Rainfall-runoff events in 1994-1995 in the Samian Watershed

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Q_{e_i} - Q_{o_i})^2}{n}} \quad (7)$$

میانگین خطای مطلق (MAE) (Xia et al., 1999):

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |Q_{e_i} - Q_{o_i}| \quad (8)$$

ضریب همبستگی (CC) (Dawson et al., 2002):

معیارهای ارزیابی مدل‌های تحقیق

جهت بررسی عملکرد هر یک روش‌های حداقل مربعات و توابع توزیع احتمال در تعیین هیدروگراف‌های واحد، علاوه بر مقایسه چشمی نمودارهای هیدروگراف‌های رواناب مستقیم محاسباتی و مشاهداتی، از سه معیار عملکرد زیر استفاده می‌گردد:

جذر میانگین مربعات خطا (RMSE) (Rai et al., 2010):

بیان‌گر اختلاف کمتر مقادیر دبی‌های محاسباتی از مشاهداتی و در نتیجه قابلیت زیاد مدل در تخمین مؤلفه‌های هیدروگراف رواناب مستقیم می‌باشد. معیار ضریب همبستگی میزان وابستگی مقادیر دبی-های مشاهداتی و محاسباتی را بیان می‌کند. مقدار آن بین منهای یک تا مثبت یک تغییر می‌کند که هر چقدر مقدار آن به یک نزدیک‌تر باشد بیان‌گر رابطه خطی مثبت و قوی بین دبی‌های محاسباتی و مشاهداتی، و در نتیجه عملکرد بهتر مدل می‌باشد. مراحل انجام مطالعه حاضر به طور خلاصه در شکل ۳ ارائه شده است.

$$CC = \sum_{i=1}^n \frac{[(Q_o)_i - (\bar{Q}_o)][(Q_e)_i - (\bar{Q}_e)]}{\sqrt{\sum_{i=1}^n [(Q_o)_i - (\bar{Q}_o)]^2 \sum_{i=1}^n [(Q_e)_i - (\bar{Q}_e)]^2}} \quad (9)$$

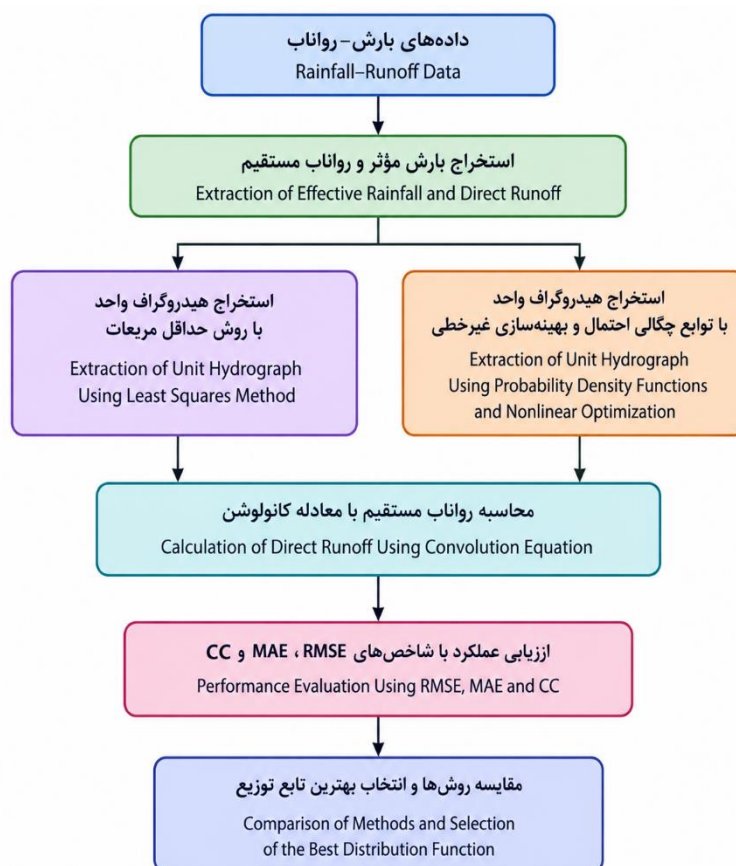
که در آنها Q_o و Q_e به ترتیب i امین مؤلفه هیدروگراف رواناب مستقیم مشاهداتی و محاسبه شده و n تعداد مؤلفه‌های هیدروگراف رواناب مستقیم است. مقادیر معیارهای RMSE و MAE بین صفر تا بی‌نهایت تغییر می‌کند که هر چقدر مقدار آنها به صفر نزدیک‌تر باشد،

جدول ۱- توابع توزیع احتمالی بکار برده شده در این تحقیق

Table 1- Probability distribution functions used in this research

توزیع احتمالی Probability distribution	فرمول Formula	پارامترهای توزیع Distribution parameters
نرمال Normal (Rao et al., 2000)	$f(x) = \frac{1}{(\beta \sqrt{2\pi})} \exp\left[-(x - \alpha)^2 / (2\beta^2)\right], -\infty < x < +\infty$	$\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$ $\beta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \alpha)^2}{n}}$
لوگ نرمال Log-Normal (Nadarajah, 2007)	$f(x) = \frac{1}{(x\beta\sqrt{2\pi})} \exp\left[-(\ln x - \alpha)^2 / (2\beta^2)\right] \quad x > 0, \beta > 0$ $-\infty < \alpha < \infty$	$\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i$ $\beta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\ln x_i - \alpha)^2}{n}}$
گاما Gamma (Bhattacharjya, 2004)	$f(x) = \frac{x^{\beta-1}}{\alpha^\beta \Gamma(\beta)} \exp\left(-\frac{x}{\alpha}\right)$ $x > 0, \beta > 0, \alpha > 0$	$\alpha\beta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ $\alpha^2\beta^2 + \beta\alpha^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$
گامبل Gumbel (Gumbel, 1960)	$f(x) = \frac{1}{\beta} \exp\left[-\exp\left(+\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + \frac{x-\alpha}{\beta}\right]$	$\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - 0.5772157\beta$ $\beta = 0.7797 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$
پیرسون Pearson (Rao & Hamed, 2000)	$f(x) = \frac{1}{\beta\Gamma(\alpha)} \left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)}, \quad x > \gamma$	$\alpha = \frac{4\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right)^3}{n\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3\right)^2}$ $\gamma = \bar{x} - \alpha\beta$ $\beta = \sqrt{\frac{1}{n\alpha} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$
ویبول Weibull (Bhunya et al., 2007)	$f(x) = \frac{\beta x^{\beta-1}}{\alpha^\beta} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right]$ $x > 0, \alpha > 0, \beta > 0$	$\alpha\Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ $\alpha^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$
ناکامی Nakagami (Rai et al., 2010)	$f(x) = \frac{2\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{2\alpha-1} \exp\left[-\frac{\alpha}{\beta} x^2\right] \quad x > 0, \alpha \geq 0.5,$ $\beta > 0$	$\alpha = \frac{E^2[x^2]}{\sigma[x^2]}$ $\beta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x^2$

توجه: x متغیر تصادفی، $\bar{x}$ میانگین، x_i i امین متغیر تصادفی، n تعداد داده‌ها، α و β به ترتیب پارامترهای مکان و شکل، Γ تابع گاما، E امید ریاضی و σ انحراف معیار هستند.



شکل ۳- فلوجارت مراحل انجام مطالعه حاضر
Figure 3- Flowchart of the steps of conducting the present study

نتایج و بحث

واسنجی مدل برنامه‌ریزی غیرخطی در محیط Mathematica

جهت واسنجی و ارزیابی کارایی شش تابع چگالی احتمال (نرمال دو پارامتری، لوگ نرمال دو پارامتری، گامیل دو پارامتری، گامای دو پارامتری، ویبول دو پارامتری، پیرسون سه پارامتری و ناکاگامی دو پارامتری) در استخراج بهینه هیدروگراف‌های واحد، از پنج رویداد منتخب بارش-رواناب حوضه آبریز سامیان، ۶۰ درصد یا سه رویداد (رویداد ۲۷ اردیبهشت، ۲۸ اردیبهشت و ۴ خرداد) برای واسنجی مدل غیرخطی و ۴۰ درصد یا دو رویداد مابقی (رویداد ۵ و ۲۷ خرداد) برای آزمون آن در نظر گرفته شدند. مدل بهینه‌سازی غیرخطی در واقع یک مساله معکوس است که مقادیر بهینه پارامترهای توزیع احتمالاتی را بر اساس حداقل نمودن اختلاف بین هیدروگراف رواناب مستقیم مشاهداتی و پیش‌بینی‌شده در دوره واسنجی برآورد می‌کند. مقادیر پارامترهای توزیع‌های احتمالاتی با استفاده از برنامه‌نویسی در نرم‌افزار Mathematica برای هر رویداد بدست آمد. در ادامه، هیدروگراف‌های واحد یک ساعته هر رگبار با روش حداقل مربعات نیز با برنامه‌نویسی در Mathematica بدست آمدند که در شکل ۴ هیدروگراف‌های واحد حاصل از هر دو روش نشان داده شده‌اند. پس از تعیین هیدروگراف‌های

همانطور که گفته شد، آمار و اطلاعات مربوط به پنج رویداد بارش - رواناب شامل اطلاعات کاغذهای باران‌نگار ثابت در ایستگاه‌های باران‌سنجی و لیمنوگراف مربوط به رواناب در ایستگاه هیدرومتری سامیان واقع در خروجی حوضه آبریز سامیان از سازمان آب منطقه‌ای استان اردبیل تهیه گردید. برای محاسبه هیتوگراف بارش مازاد با فواصل زمانی یک ساعته هر یک از رویدادهای بارش-رواناب مقدار شاخص نفوذ (ϕ) از هیتوگراف‌های بارش کسر شد. همچنین، مؤلفه‌های هیدروگراف‌های رواناب مستقیم با کسر کردن دبی پایه ثابت از مؤلفه-های هیدروگراف سیلاب (رواناب) حاصل شد. در این پژوهش، سعی شده است از بارش‌هایی که در فصل بهار اتفاق افتاده‌اند استفاده شود زیرا در این فصل پوشش گیاهی به‌طور کامل رشد نکرده است، و در نتیجه تأثیر کمتری بر روی میزان رواناب خواهد داشت. با این حال، به دلیل کوهستانی بودن منطقه، ذوب شدن برف‌ها در این فصل بر خصوصیات هیدروگراف‌ها و رواناب‌ها می‌تواند تأثیرگذار باشد.

هیدروگراف رواناب مستقیم بوده است.

آزمون مدل برنامه‌ریزی غیرخطی در محیط *Mathematica*

بمنظور آزمون نمودن توزیع‌ها، مقادیر میانگین پارامترهای بدست آمده برای هر توزیع در سه رگبار (۲۷ و ۲۸ اردیبهشت و ۴ خرداد) در دوره واسنجی محاسبه شده و هیدروگراف‌های واحد یک ساعته دوره آزمون (۵ و ۲۷ خرداد) با استفاده از توابع توزیع و مقادیر معلوم پارامترها تعیین شدند (شکل ۶). سپس هیدروگراف‌های رواناب مستقیم با استفاده از معادله پیش‌پیشی برای رگبارهای دوره آزمون محاسبه گردیدند (شکل ۷).

همانطور که از این اشکال مشاهده می‌گردد، در هر دو رویداد هیچ یک از توزیع‌ها نوساناتی در شاخه‌های بالارونده و پایین‌رونده هیدروگراف نشان ندادند. نوسانات موجود در هیدروگراف‌های واحد مشاهداتی (حداقل مربعات) هر دو رویداد نیز همانطور که قبلاً گفته شد، می‌تواند بدلیل خطای اندازه‌گیری داده‌های بارش-رواناب آن دو رویداد، خطای جداسازی جریان پایه و ... باشد. در رویداد ۵ خرداد، توزیع لوگ نرمال زمان پیک را با خطای کمتر برآورد نموده است. همه توزیع‌ها غیر از توزیع گاما شاخه بالا رونده هیدروگراف را با دقت قابل قبولی برآورد کردند. توزیع ویبول و نرمال عملکرد مناسبی در تخمین دبی اوج نشان دادند. در رویداد ۲۷ خرداد نیز توزیع لوگ نرمال زمان پیک را با خطای کمتر برآورد نموده است. همه توزیع‌ها غیر از توزیع گاما شاخه بالا رونده هیدروگراف را با دقت قابل قبولی برآورد کردند. توزیع ویبول عملکرد مناسبی در تخمین دبی اوج نشان دادند. قابل ذکر است که توزیع‌های پیرسون و ناکاگامی بدلیل عملکرد بسیار ضعیف در دوره آزمون (بدلیل مقادیر پارامترهای متفاوت آن‌ها در رویدادهای دوره واسنجی) از این نمودارها حذف شدند. نتایج مشابهی را می‌توان از شکل ۷ در مورد عملکرد توزیع‌ها در برآورد هیدروگراف‌های رواناب مستقیم (حاصل از حاصل ضرب مقادیر بارش مازاد در هیدروگراف‌های واحد) گرفت.

علاوه بر مقایسه چشمی نمودارهای هیدروگراف‌های رواناب مستقیم مشاهداتی و محاسباتی، عملکرد مدل‌ها با سه معیار عملکرد جذر میانگین مربعات خطا (RMSE)، میانگین خطای مطلق (MAE) و ضریب همبستگی (CC) نیز مورد ارزیابی قرار گرفت. در جدول ۲ مقادیر معیارهای عملکرد مدل‌ها نشان داده شده است. در رویداد ۵ خرداد، توزیع گاما با مقدار RMSE برابر ۰/۰۱۱۶، مقدار MAE برابر ۰/۰۰۸۶ کمترین خطا را در برآورد هیدروگراف رواناب مستقیم نشان می‌دهد. با این حال، توزیع لوگ نرمال بالاترین میزان ضریب همبستگی (۰/۸۳۰) را به خود اختصاص داده است که نشان می‌دهد شکل هیدروگراف را بیشتر از سایر توزیع‌ها از جمله توزیع گاما حفظ نموده است. لذا توزیع لوگ نرمال می‌تواند بعنوان بهترین توزیع با خطاهای نسبتاً کم (۰/۰۱۳۳ و ۰/۰۱۱۱) در این رویداد انتخاب شود. در رویداد ۲۷ خرداد، توزیع لوگ نرمال با مقدار RMSE برابر ۰/۰۱۳۵، مقدار

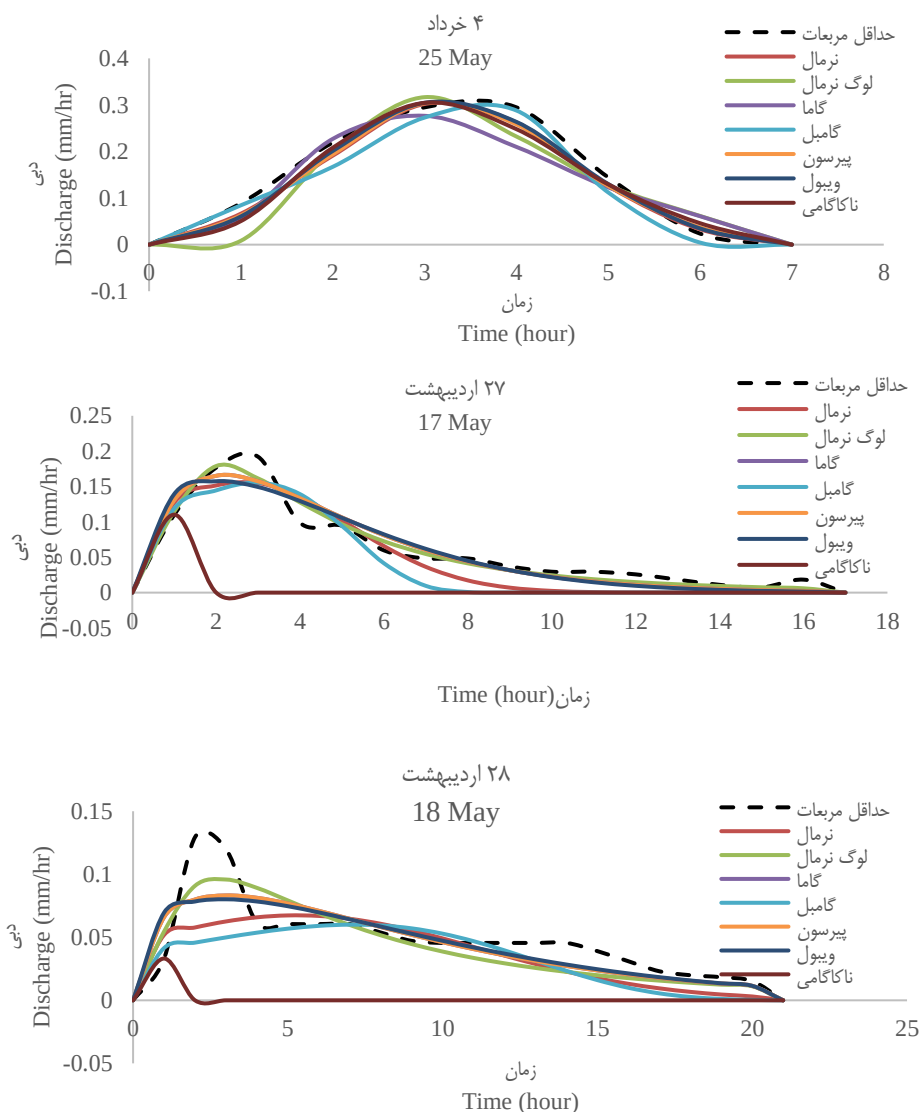
واحد، با استفاده از رابطه پیش‌پیشی بارش-رواناب و با در اختیار داشتن هیتوگراف‌های بارش مازاد، هیدروگراف‌های رواناب مستقیم از طریق حاصل ضرب آن‌ها حاصل شدند (شکل ۵).

با توجه به اینکه هیدروگراف واحد مشاهده‌ای مستقلاً در دسترس نیست، به منظور مقایسه هیدروگراف‌های واحد حاصل از توابع احتمالاتی، هیدروگراف واحد به دست آمده از روش حداقل مربعات به عنوان روش مقایسه‌ای در نظر گرفته شد. همانطور که گفته شد نوسانات و خطاهایی در شاخه پایین‌رونده هیدروگراف‌های رواناب مستقیم همه رویدادها (غیر از رویداد ۴ خرداد) وجود دارد که می‌تواند باعث افزایش خطای محاسباتی مدل‌ها گردد. شکل ۴ نشان می‌دهد که هیچکدام از توابع نوسانات انتهایی ندارند. در رویداد ۴ خرداد، همه توابع دبی پیک و زمان پیک را با دقت بالایی برآورد کردند. همچنین، عملکرد آنها در حفظ شکل هیدروگراف مشاهداتی (حداقل مربعات) تقریباً مشابه و قابل قبول بود. برای رویداد ۲۷ اردیبهشت، همه توابع (غیر از توزیع ناکاگامی) موفق به تخمین صحیح زمان پیک شدند ولی دبی پیک توزیع لوگ نرمال به مقدار مشاهداتی نزدیک‌تر است. همه توزیع‌ها شاخه بالارونده را به خوبی شبیه‌سازی نموده ولی در مورد شاخه پایین‌رونده همه توزیع‌ها غیر از توزیع نرمال، گامبل و ناکاگامی عملکرد موفق‌تری دارند. برای رویداد ۲۸ اردیبهشت، همه توزیع‌ها در تخمین زمان اوج و شاخه بالارونده هیدروگراف عملکرد نسبتاً خوبی دارند. با این حال، فقط دبی پیک توزیع لوگ نرمال اختلاف کمتری از مقدار واقعی دارد. عملکرد همه توابع غیر از توزیع ناکاگامی در برآورد شاخه پایین‌رونده نسبتاً مشابه و بدون نوسان می‌باشد. سطح زیر منحنی توزیع ناکاگامی بطور محسوسی کمتر از سایر توزیع‌ها در رویدادهای ۲۷ و ۲۸ اردیبهشت است که بیان‌گر عملکرد ضعیف این تابع در شبیه‌سازی هیدروگراف واحد است ولی از آنجایی که این توزیع در رویداد ۴ خرداد نتیجه رضایت بخشی داشته است، می‌توان عملکرد ضعیف آن را در دو رویداد دیگر به خطاهای اندازه‌گیری داده‌ها و حساس بودن این تابع به وجود خطاها ربط داد.

به منظور ارزیابی عملکرد هیدروگراف‌های واحد حاصل از روش‌های مختلف و کارایی توابع احتمال، هیدروگراف‌های رواناب مستقیم محاسباتی با هیدروگراف‌های رواناب مستقیم مشاهده‌ای نیز مقایسه شدند. نتایج مشابهی را می‌توان از شکل ۵ در مورد عملکرد توزیع‌های آماری در تعیین هیدروگراف‌های رواناب مستقیم گرفت که از حاصل ضرب مقادیر بارش مازاد در هیدروگراف‌های واحد مربوطه بدست آمده‌اند. همانطور که در این شکل‌ها مشاهده می‌گردد، روش حداقل مربعات با دقت بسیار بالایی هیدروگراف رواناب مستقیم و در نتیجه هیدروگراف واحد را محاسبه کرده است. در کل می‌توان چنین نتیجه‌گیری کرد که توزیع ناکاگامی و گامبل جزو ضعیف‌ترین توابع و توزیع لوگ نرمال جزو کارآمدترین توابع در شبیه‌سازی هیدروگراف‌های واحد می‌باشند. روش حداقل مربعات نیز با دقت بالایی قادر به برآورد

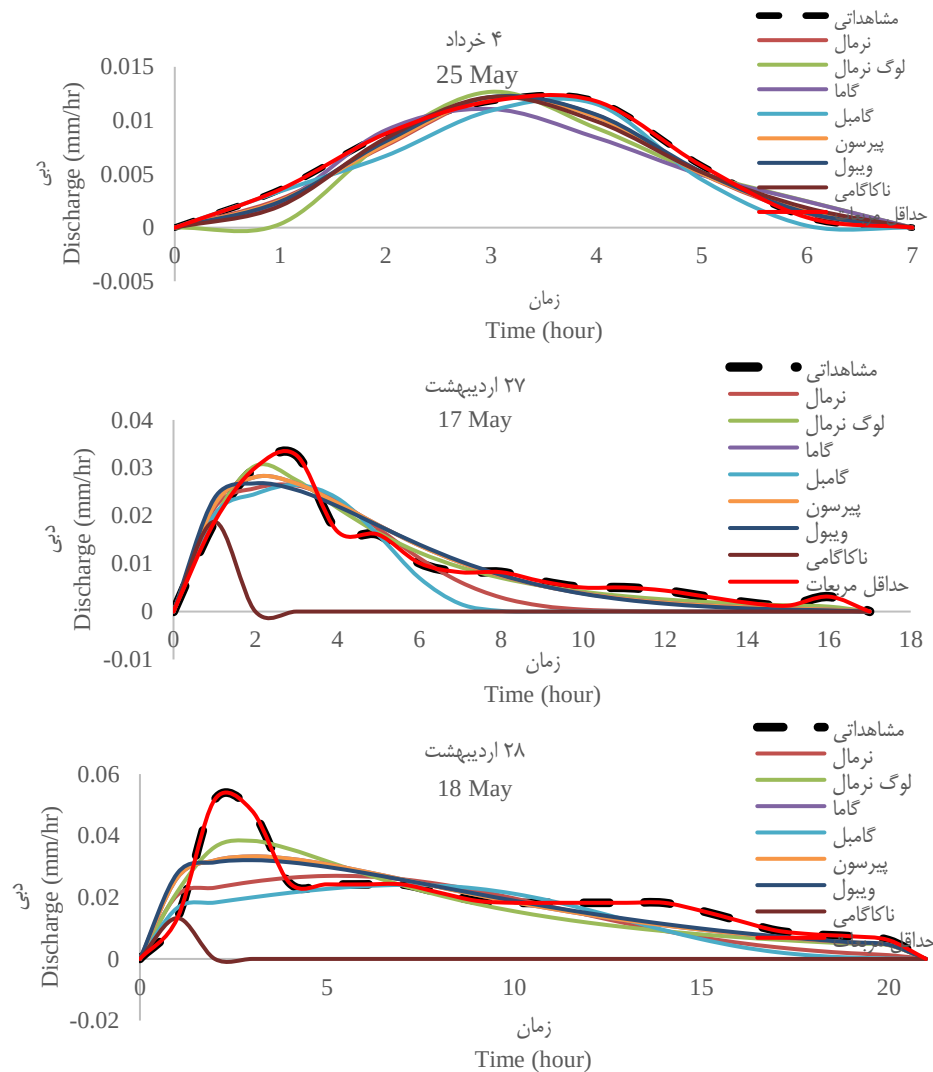
هر دو رویداد بیشتر از بقیه توزیع‌ها می‌باشد و بدین علت از نمودارها حذف گردیده‌اند. روش حداقل مربعات نیز دارای مقادیر معیارهای عملکرد بهتری از همه توزیع‌ها در هر دو رویداد است. بنابراین روش حداقل مربعات از جمله روش‌های مناسب در برآورد هیدروگراف واحد می‌باشد.

MAE برابر $0/0112$ و ضریب همبستگی $0/816$ بیشترین کارایی را نشان می‌دهد. در این رویداد نیز ضریب همبستگی ($0/455$) توزیع گاما کم می‌باشد که توانایی کم آن را در حفظ شکل هیدروگراف بیان می‌کند. با در نظر گرفتن مقادیر متوسط توابع عملکرد توزیع‌ها در هر رویداد، می‌توان گفت که توزیع‌های لوگ نرمال و نرمال به‌ترتیب دارای پتانسیل بالاتر در تخمین هیدروگراف‌های واحد می‌باشند. همانطور که از جدول مشاهده می‌شود خطاهای توزیع‌های پیرسون و ناکاگامی در



شکل ۴- هیدروگراف‌های واحد محاسبه شده از روش حداقل مربعات و توابع توزیع بهینه‌سازی شده با مدل برنامه‌ریزی غیرخطی در دوره واسنجی در حوضه آبریز سامیان

Figure 4- Unit hydrographs calculated using the least squares method and distribution functions optimized with the nonlinear programming model during the calibration period in the Samian Watershed

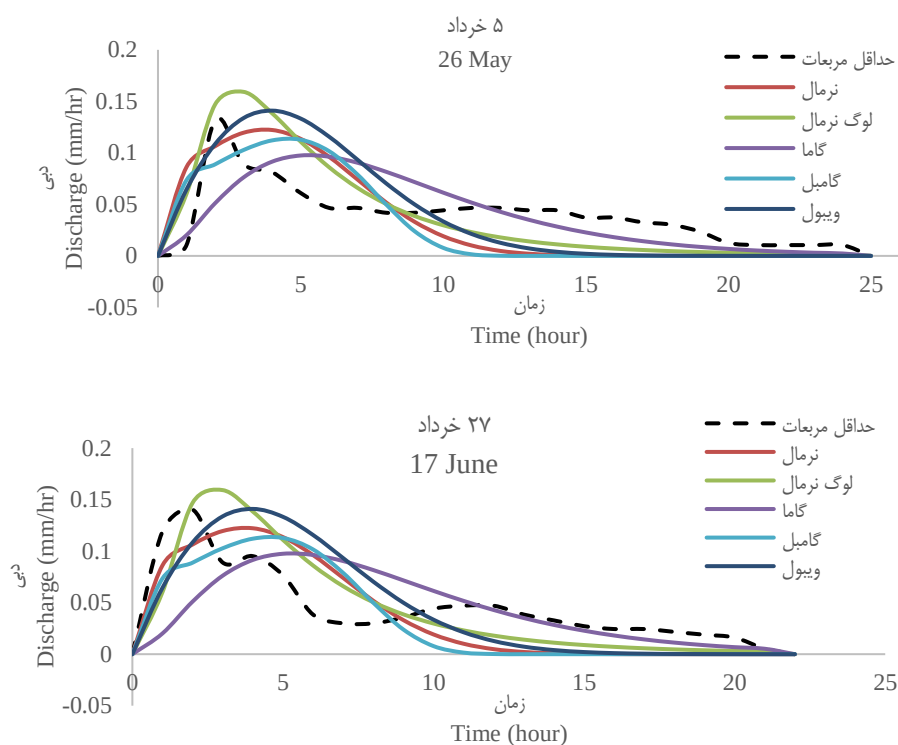


شکل ۵- هیدروگراف‌های رواناب مستقیم مشاهداتی و محاسباتی حاصل از روش حداقل مربعات و توابع توزیع بهینه‌سازی شده با مدل برنامه ریزی غیرخطی در حوضه آبریز سامیان در دوره واسنجی

Figure 5- Observational and computational direct runoff hydrographs obtained from the least squares method and distribution functions optimized with a nonlinear programming model in the Samian Watershed during the calibration period

بطور کلی، با توجه به نتایج حاصل در دوره واسنجی و آزمون می‌توان نتیجه گرفت که توزیع لوگ نرمال بهترین توزیع برای برآورد و محاسبه هیدروگراف‌های واحد (علی‌الخصوص در برآورد شاخه بالارونده و زمان و دبی اوج) در حوضه آبریز سامیان می‌باشد. همچنین، توابع پیرسون و ناکامامی جزو ضعیف‌ترین توزیع‌ها در برآورد هیدروگراف‌های آن حوضه می‌باشند. در تحقیقات صورت گرفته توسط صادقی طبس و همکاران (Sadeghi Tabas *et al.*, 2014)، باتاجارچیا (Bhattacharjia, 2004) و قربانی و همکاران (Ghorbani *et al.*, 2017) نیز توزیع لوگ نرمال عملکرد بهتری از خود نشان داده است.

با این حال، یکی دیگر از ایرادات روش حداقل مربعات این است که ممکن است مؤلفه‌های هیدروگراف واحد را بصورت منفی محاسبه نماید و این بدان علت است که در روش حداقل مربعات، هیدروگراف واحد تولید شده با استفاده از رابطه (۳) بدلیل بکارگیری ماتریس معکوس در آن رابطه، ممکن است با هیدروگراف رواناب مستقیم هماهنگی کامل نداشته باشد و برخی از اعداد منفی شوند. در این صورت می‌بایست با اصلاحاتی در عرض‌های هیدروگراف واحد آن را با هیدروگراف رواناب مستقیم هماهنگ کرد (Mir Bagheri, 1995).



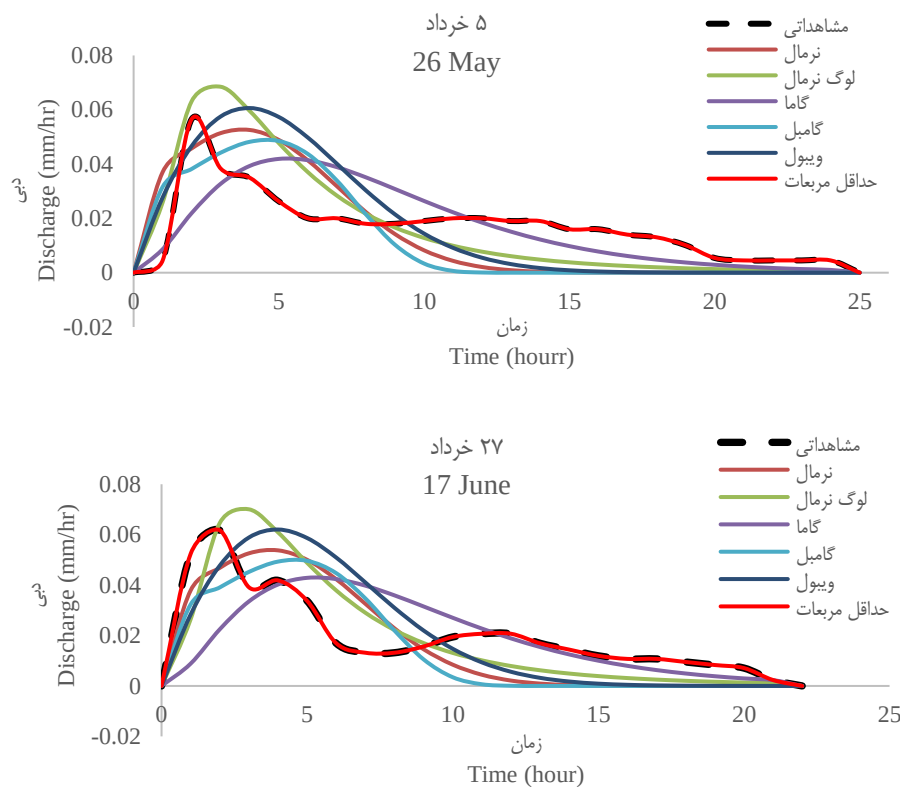
شکل ۶- هیدروگراف‌های واحد محاسبه شده از روش حدافل مربعات و توابع توزیع بهینه‌سازی شده با مدل برنامه‌ریزی غیرخطی در دوره آزمون در حوضه آبریز سامیان

Figure 6- Unit hydrographs calculated from the least squares method and distribution functions optimized with the nonlinear programming model during the test period in the Samian Watershed

جدول ۲- مقادیر معیارهای عملکرد روش حدافل مربعات و توابع‌های احتمالاتی مدل برنامه‌ریزی غیرخطی در دوره آزمون در حوضه آبریز سامیان

Table 2- Values of performance criteria of the least squares method and probability distributions of the nonlinear programming model during the test period in the Samian Watershed

توزیع Distribution	CC		MAE		RMSE	
	۲۷ خرداد	۵ خرداد	۲۷ خرداد	۵ خرداد	۲۷ خرداد	۵ خرداد
	17 June event	26 May event	17 June event	26 May event	17 June event	26 May event
گاما Gamma	0.455	0.670	0.0108	0.0086	0.0167	0.0116
گامبل Gumbel	0.716	0.649	0.0135	0.0134	0.0151	0.0150
لوگ نرمال Log-Normal	0.816	0.830	0.0112	0.0111	0.0135	0.0133
نرمال Normal	0.783	0.694	0.0125	0.0130	0.0136	0.0148
پیرسون Pearson	-0.236	-0.206	0.0210	0.0178	0.0260	0.0214
ویبول Weibul	0.710	0.719	0.0145	0.0137	0.0166	0.0158
ناکاگامی Nakagami	0.844	0.466	0.0237	0.0243	0.0350	0.0397
حدافل مربعات Least Square	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000



شکل ۷- مقایسه هیدروگراف‌های رواناب مستقیم مشاهداتی و محاسباتی حاصل از روش حداقل مربعات و توابع توزیع بهینه‌سازی شده با مدل برنامه‌ریزی غیرخطی در دوره آزمون در حوضه آبریز سامیان
Figure 7- Comparison of observational and computational direct runoff hydrographs obtained from the least squares method and optimized distribution functions with the nonlinear programming model during the test period in the Samian Watershed

نتیجه‌گیری

ضعیفی به دلیل نوسانی بودن شاخه مذکور نشان دادند. توزیع‌های پیرسون و ناکاگامی بدلیل اینکه در دوره واسنجی پارامترهای متفاوتی در سه رویداد آن دوره حاصل نمودند، لذا در مرحله آزمون که از میانگین آن پارامترها استفاده شده بود عملکرد ضعیفی نشان دادند. توزیع گاما در تخمین شاخه‌های بالا و پایین‌رونده و در کل در حفظ شکل هیدروگراف عملکرد ضعیفی نشان داد. توزیع ویبول عملکرد بهتری از توزیع گامیل ارائه نمود. روش کلاسیک حداقل مربعات نیز که برای محاسبه هیدروگراف‌های واحد حوضه سامیان بکار برده شد، در رویدادهایی که فقط دارای یک پالس بارش مازاد بودند، عملکرد بهتری نسبت به توابع توزیع و مدل بهینه‌سازی غیرخطی نشان داد.

برای مطالعات آینده پیشنهاد می‌شود عملکرد سایر توزیع‌های آماری مانند توزیع‌های بتا و لجستیک در استخراج هیدروگراف واحد حوضه سامیان بررسی شود. همچنین، عملکرد توزیع‌های آماری در تعیین هیدروگراف واحد از رویدادهای مرکب بارش-رواناب و نیز از

در این پژوهش، توانایی مدل بهینه‌سازی غیرخطی به‌منظور برآورد هیدروگراف‌های واحد با استفاده از توابع توزیع احتمال مختلف بررسی شد. توابع توزیع بکار رفته عبارت بودند از: نرمال دو-پارامتری، لوگ نرمال دو-پارامتری، گامیل دو-پارامتری، گاما دو-پارامتری، پیرسون سه-پارامتری، ویبول دو-پارامتری و ناکاگامی دو پارامتری. مزیت اصلی این مدل و توابع این است که تعداد پارامترهای مجهولی برابر تعداد کم پارامترهای تابع توزیع بکار رفته می‌باشد. در این تحقیق، از داده‌های بارش-رواناب پنج رویداد در حوضه آبریز سامیان جهت ارزیابی کارایی توزیع‌ها استفاده گردید. واسنجی و آزمون مدل بهینه‌سازی غیرخطی با استفاده از برنامه‌نویسی در محیط Mathematica انجام گردید. توزیع‌های لوگ نرمال و نرمال به‌ترتیب برآورد خوبی از دبی پیک و زمان اوج و شاخه بالارونده هیدروگراف واحد در همه رویدادها بر اساس ارزیابی-های چشمی و آماری ارائه دادند. همه توزیع‌های آماری در برآورد شاخه-های پایین‌رونده هیدروگراف‌های واحد (غیر از رویداد ۴ خرداد) عملکرد

رویدادهای بارش-رواناب مربوط به ماه‌های گرم سال که در آنها حوضه دارای ذخیره برفی نیستند، بررسی گردد. در نهایت، تحقیق مشابه در سایر حوضه‌های آبریز استان اردبیل انجام و یک مدل مناسب برای کل استان پیشنهاد گردد.

References

1. Bhattacharjya, R.K. (2004). Optimal design of unit hydrographs using probability distribution and genetic algorithms. *Sadhana*, 29(5), 499-508. <https://doi.org/10.1007/BF02703257>
2. Bhunya, P.K., Berndtsson, R., Ojha, C.S.P., & Mishra, S.K. (2007). Suitability of gamma, chi-square, Weibull, and beta distributions as synthetic unit hydrographs. *Journal of Hydrology*, 334, 28-38. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2006.09.022>
3. Dawson, C.W., Harpham, C., Wilby, R.L., & Chen, Y. (2002). Evaluation of artificial neural network techniques for flow forecasting in the River Yangtze, China. *Journal of Hydrology and Earth System Sciences*, 6(4), 619-626. <https://doi.org/10.5194/hess-6-619-2002>
4. Dooge, J.C.I., & Garvey, B.J. (1970). Discussion of "Data error effects in unit hydrograph derivation by E.M. Laurenson and T. O'Donnell". *Journal of the Hydraulics Division, Proceeding of the American Society of Civil Engineers*, 96(HY9), 1888-1894. <https://doi.org/10.1061/JYCEAJ.0002694>
5. Ghorbani, M.A., Singh, V.P., Sivakumar, B., Kashani, M.H., Arvind Atre, A., & Asadi, H. (2017). Probability distribution functions for unit hydrographs with optimization using genetic algorithm. *Applied Water Science*, 7, 663-676. <https://doi.org/10.1007/s13201-015-0278-y>
6. Gumbel, E.J. (1960). Multivariate Extremal Distributions. *Bulletin of the International Statistical Institute*, 39(2), 471-475.
7. Li, H., & Cidan, Y. (2020). Application of Gamma functions to the determination of unit hydrographs. *Nonlinear Processes in Geophysics, Society of Civil Engineers*, 106(HY1), 85-97. <https://doi.org/10.5194/npg-2020-1>
8. Mays, L.W., & Coles, L. (1980). Optimization of unit hydrograph determination. *Journal of the Hydraulics Divisions, Proceeding of the American Society of Civil Engineers*, 106(HY1), 85-97. <https://doi.org/10.1061/JYCEAJ.0005361>
9. Nadarajah, S. (2007). Probability models for unit hydrograph derivation. *Journal of Hydrology*, 344, 185-189. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2007.07.004>
10. Naghibi, S.A., Vafakhah, M., Moghaddam Nia, A., & Eslamian, S. (2018). Evaluation of some probability distribution functions for derivation of unit hydrograph in the Bar Watershed, Iran. *International Journal of Hydrology Science and Technology*, 8(2), 134-147. <https://doi.org/10.1504/IJHST.2018.090880>
11. Najafi, M. (2002). *Hydrological Systems: Rainfall-Runoff Modeling*. Volume 1, University of Tehran. (In Persian)
12. Mahdavi, M. (2002). *Applied Hydrology*. Volume 1, University of Tehran. (In Persian)
13. Mir Bagheri, A. (1995). *Engineering Hydrology*. University of Shiraz. (In Persian)
14. Overton, D.E. (1968). A least-squares hydrograph analysis of complex storms on small agricultural watersheds. *Water Resources Research*, 4(5), 955-963. <https://doi.org/10.1029/WR004i005p00955>
15. Prasad, T.D., Gupta, R., & Prakash, S. (1999). Determination of optimal loss rate parameters and unit hydrograph. *Journal of Hydrologic Engineering*, 4(1), 83-87. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1084-0699\(1999\)4:1\(83\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1084-0699(1999)4:1(83))
16. Rai, R.K., Sarkar, S., Upadhyay, A., & Singh, V.P. (2010). Efficacy of Nakagami-m distribution function for deriving unit hydrograph. *Journal of Water Resources Management*, 24, 563-575. <https://doi.org/10.1007/s11269-009-9459-5>
17. Ramaseshan, S., Chaube, U.C., & Sharma, A.K. (1973). A discrete linear model for the hydrologic basin. *Proceedings of the First World Congress on Water Resources*, 4, 367-376.
18. Rao, A.R., & Hamed, K.H. (2000). *Flood Frequency Analysis*. CRC Press, Boca Raton, FL.
19. Sadeghi Tabas, S., Akbarpour, A., & Pourreza Bilondi, M. (2014). Application of intelligent algorithms in providing optimal unit hydrograph using probability distribution functions. *Iranian Journal of Irrigation & Drainage*, 8(2), 284-295. (In Persian)
20. Singh, V.P. (1982). Lag time for diverging overland flow. *Nordic Hydrology*, 13, 39-48. <https://doi.org/10.2166/nh.1982.0004>
21. Snyder, W.M. (1955). Hydrograph analysis by the method of least squares. *Journal of the Hydraulics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, 81(793), 25.
22. Snyder, W.M. (1961). *Matrix operations in hydrograph computations*. Research paper no. 1, Tennessee Valley Authority, Knoxville, Tenn.
23. Xia, Y., Fabian, P., Stohl, A., & Winterhalter, M. (1999). Forest climatology: estimation of missing values for Bavaria, Germany. *Agricultural and Forest Meteorology*, 96, 131-144. [https://doi.org/10.1016/S0168-1923\(99\)00056-8](https://doi.org/10.1016/S0168-1923(99)00056-8)