

## تحلیل منطقه‌ای و استخراج منحنی بزرگی - مساحت - فراوانی خشکسالی با استفاده از توابع مفصل در حوضه آبریز دریاچه ارومیه

مجید منتصری<sup>۱\*</sup> - بابک امیرعطایی<sup>۲</sup> - حسین رضایی<sup>۳</sup>

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۹/۲۳

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۳/۳۰

### چکیده

خشکسالی‌ها رویدادهای کرانه‌ای هستند که براساس تداوم در زمان و تاثیرات مکانی آن مشخص می‌شوند. بطور کلی خشکسالی‌های منطقه‌ای متأثر از گردش عمومی جو (در مقیاس بزرگ) و عوامل طبیعی منطقه‌ای شامل شرایط توپوگرافی، دریاچه‌های طبیعی، موقعیت نسبت به مرکز و مسیر جریان‌های آب و هوایی در جو (در مقیاس ریز) بوده و اثرات کاملاً همسانی در یک منطقه وسیع را نشان نمی‌دهند. لذا در این مطالعه توزیع احتمال توابع بزرگی-مساحت تحت پوشش خشکسالی در حوضه آبریز دریاچه ارومیه با استفاده از تکنیک توابع مفصل انجام پذیرفته و منحنی بزرگی-مساحت-فراوانی/احتمال خشکسالی (S-A-F) توسعه داده شده است. بدین منظور از سری داده‌های شاخص خشکسالی یکماهه SPI در ۲۴ ایستگاه هواشناسی در محدوده مطالعاتی و ۷ خانواده تابع مفصل شامل کلایتون، گامبل، فرانک، جو، گالامبوس، پلاکت و نرمال برای مدل‌سازی توزیع احتمال توابع دو متغیر همبسته بزرگی و مساحت تحت پوشش خشکسالی استفاده شده است. عملکرد توابع مفصل هفتگانه مذکور براساس معیارهای آماری رایج مورد آزمون قرار گرفته و در نهایت بازای مناسب‌ترین تابع مفصل (مفصل فرانک)، دوره‌های بازگشت شرطی تعیین و منحنی S-A-F برای منطقه مطالعاتی استخراج شد. نتایج مطالعه نشان می‌دهد که رفتارهای کرانه‌ای اقلیمی (خشکسالی یا ترسالی) اکثریت محدوده مطالعاتی را تحت تاثیر قرار می‌دهند. درحالیکه رفتارهای نیمه یا شبه‌خشک دارای پوشش مساحت متفاوت با پراکندگی قابل توجه در محدوده مطالعاتی بوده و با افزایش بزرگی خشکسالی مساحت بیشتری از حوضه آبریز را در بر می‌گیرند. بطوریکه بعنوان مثال، بزرگی خشکسالی برای زمان برگشت ۵۰ ساله با کمترین و بیشترین مقادیر در منطقه یعنی ۰/۴۲ و ۱/۰ بترتیب حدود ۵ و ۹۵ درصد مساحت محدوده مطالعاتی را پوشش می‌دهد.

**واژه‌های کلیدی:** بزرگی خشکسالی، توزیع حاشیه‌ای، شاخص بارش استاندارد، مساحت تحت پوشش خشکسالی

### مقدمه

چندمتغیره شناخته شده که اغلب توسط متغیرهای مدت، بزرگی، شدت و مساحت تحت پوشش (گسترده‌گی مکانی) مشخص می‌شود. اگرچه تحلیل نقطه‌ای خشکسالی می‌تواند اطلاعات مفیدی را از یک رویداد خشکسالی در یک نقطه یا منطقه محدود ارائه کند، ولی نتایج آن برای مدیریت خشکسالی یا ارزیابی ریسک خشکسالی در یک منطقه وسیع دارای عدم قطعیت‌های اساسی خواهد بود (۱۳ و ۵۰). بطور معمول خشکسالی‌های کوتاه/بلند مدت در طبیعت بصورت منطقه‌ای اتفاق می‌افتند و اغلب مساحت بسیار بزرگی را تحت تاثیر قرار می‌دهند. لذا مطالعه خشکسالی در چارچوب تحلیل منطقه‌ای، امکان ارزیابی جامع‌تری از این پدیده را در هر منطقه فراهم نموده و از ضروریات اساسی و مهم در استراتژیک‌های کوتاه‌مدت و بلندمدت در مدیریت منابع آب محسوب می‌شود (۲۹). در چنین تحلیلی، علاوه بر مدت و بزرگی خشکسالی، درصد مساحتی که تحت تاثیر خشکسالی قرار گرفته مورد ارزیابی قرار می‌گیرد (۳، ۳۷، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۵۱ و ۵۲).

خشکسالی یک پدیده طبیعی و بلندمدت موثر بر مناطق بزرگ است که با بارش کمتر از حد انتظار توصیف می‌گردد. در مقایسه با دیگر بلاهای طبیعی مانند سیل و طوفان، گسترده‌گی مکانی خشکسالی‌ها معمولاً بسیار بزرگتر است (۳۳). هنگامی که خشکسالی از یک فصل یا دوره طولانی مدت گسترش یابد، منجر به کمبود آب شده و این آب ناکافی در دسترس منجر به ایجاد خسارات اجتماعی، اقتصادی و زیست محیطی می‌گردد (۵۳). از آنجائیکه خشکسالی‌ها بطور قابل توجهی از نظر ویژگی‌های زمانی و مکانی، از یک منطقه به منطقه دیگر متفاوت می‌باشند، این پدیده به عنوان یک پدیده

۱، ۲ و ۳- به ترتیب استاد گروه مهندسی آب، دانشجوی دکتری مهندسی منابع آب و دانشیار گروه مهندسی آب، دانشگاه ارومیه  
\* - نویسنده مسئول: (Email: montaseri@hotmail.com)

در پرتغال را در دوره آماری ۲۰۰۴-۱۹۱۰ با استفاده از شاخص SPI در مقیاس زمانی ۱، ۶ و ۱۲ ماهه مورد مطالعه قرار دادند. نتایج ایشان نشان داد که بخش جنوبی کشور نسبت به بخش شمالی آن بیشتر تحت تاثیر خشکسالی بوده است (۴۰). حسینی صفا و مرید در سال ۱۳۸۷ به بررسی احتمالاتی خصوصیات مکانی شدت خشکسالی در استان تهران پرداختند. در این مطالعه منحنی بزرگی-مساحت-فراوانی خشکسالی (S-A-F) بازای شاخص خشکسالی SPI در منطقه را توسعه داده و خشکسالی سال‌های مختلف را بازای دوره‌های بازگشت مختلف مورد بررسی قرار دادند (۱۴). با مرور مطالعات مذکور، روش‌های مختلفی جهت تحلیل دو متغیر بزرگی و مساحت تحت پوشش خشکسالی مورد استفاده قرار گرفته است. با این وجود روش‌های مذکور دارای محدودیت‌های بسیار جدی از جمله محدود کردن تحلیل در دوره تاریخی، عدم امکان استخراج پیش‌بینی‌های بلندمدت و کوتاه مدت رخداد‌های خشکسالی آتی، عدم حفظ کامل همبستگی بین دو متغیر وابسته خشکسالی و محدودیت یکسان بودن توابع احتمال حاشیه‌ای متغیرهای وابسته، می‌باشند.

در سال‌های اخیر، توابع مفصل بعنوان یک تکنیک پیشرفته جدید برای مدل‌سازی توزیع احتمال توام دو یا چندمتغیره در علوم مختلفی از جمله هیدرولوژی و مهندسی منابع آب توسعه یافته و بطور گسترده‌ای بکار گرفته شده است. روش توابع مفصل<sup>۴</sup> یک روش انعطاف‌پذیر و بسیار کارآمد در مدل‌سازی خصوصیات دو یا چند متغیر وابسته پدیده‌های طبیعی مانند مدت-بزرگی خشکسالی یا بزرگی-مساحت خشکسالی به دلیل حفظ کامل همبستگی بین متغیرها و عدم محدودیت در یکسان بودن توابع حاشیه‌ای متغیرها جهت پیش‌بینی بلندمدت رخداد‌های خشکسالی مورد توجه محققین قرار گرفته است، که ذیلاً مواردی ارائه شده است.

شیائو در سال ۲۰۰۶ توزیع احتمال توام دومتغیره خصوصیات خشکسالی مدت و بزرگی خشکسالی در جنوب تایوان را با استفاده از شاخص SPI و تئوری توابع مفصل مورد ارزیابی قرار داد (۴۴). سانگ و سینگ در سال ۲۰۱۰ توزیع احتمال توام مدت، بزرگی و فواصل بین دو خشکسالی را با استفاده از تابع مفصل پلاکت سه متغیره در چین را مدل‌سازی نمودند (۴۹). ردی و گانگولی در سال ۲۰۱۲ چهار گروه مختلف توابع مفصل دومتغیره شامل خانواده‌های ازشمیدسی، مقادیر حدی، پلاکت و بیضوی را برای مدل‌سازی توزیع احتمال توام خصوصیات خشکسالی بکار بردند و مفصل گامبل-هوگارد را به عنوان تابع مفصل بهتر معرفی و ارائه نمودند. در نهایت از این تابع مفصل برای استخراج منحنی‌های بزرگی-مدت-فراوانی در منطقه راجاستان در هند استفاده نمودند (۳۵). میرعباسی و همکاران در سال ۲۰۱۲ از توابع مفصل دومتغیره برای مدل‌سازی مدت و بزرگی

به منظور درک ماهیت زمانی و مکانی خشکسالی در مقیاس منطقه‌ای، مطالعاتی مختلفی در گذشته صورت گرفته است. بررسی ریسک خشکسالی منطقه‌ای می‌تواند از طریق رابطه چندمتغیره مانند توسعه منحنی‌های بزرگی-مساحت-فراوانی خشکسالی (S-A-F<sup>۱</sup>) و یا شدت-مساحت-فراوانی خشکسالی (I-A-F<sup>۲</sup>) مورد بررسی قرار گیرد (۳۶). این منحنی‌ها بر اساس روابط ریاضی بین بزرگی یا شدت خشکسالی و مساحت تحت پوشش آن (گسترده‌گی مکانی) برای دوره‌های بازگشت مختلف بدست می‌آیند (۲ و ۱۸). برای استخراج چنین منحنی‌هایی، اغلب از توزیع‌های احتمالی مقادیر حدی استفاده می‌شود. بدین صورت که برای درصد مساحت مشخصی از خشکسالی، مقدار خشکسالی مربوطه از هر رویداد تاریخی استخراج شده و سپس تحلیل فراوانی صورت می‌گیرد.

یکی از اولین مطالعات در زمینه تحلیل مکانی خشکسالی توسط تاسه در سال ۱۹۷۶ انجام شده است. در این مطالعه، با استفاده از یک روش تجربی تک متغیره مانند روش مونت کارلو یا تکنیک تولید داده، با ماکزیمم شدت کمبود به عنوان مشخصه خشکسالی و مساحت متاثر، احتمال پوشش مکانی خشکسالی را برای ارزیابی روابط شدت-کمبود-مساحت ارائه نمود (۵۱). در سال ۲۰۰۲، کیم و والدیز خصوصیات زمانی و مکانی خشکسالی را با استفاده از شاخص خشکسالی پالم (PDSI) و با توسعه منحنی‌های شدت-مساحت-فراوانی برای حوضه رودخانه کانچوس مکزیک مورد تحلیل قرار دادند. در این مطالعه، از روش کربجینگ برای میانمایی مقادیر شاخص خشکسالی در منطقه استفاده نمودند (۱۹). هیسدال و تالاکسن در سال ۲۰۰۳ با استخراج منحنی‌های S-A-F، سری زمانی ماهیانه بارندگی و جریان رودخانه در دانمارک را بر اساس روش توابع متعامد تجربی<sup>۳</sup>، مدل‌سازی نمودند (۱۲). در سال ۲۰۰۴، لوکاس و واسیلادیس تغییرات زمانی و مکانی خشکسالی هواشناسی را در منطقه تسلاوی یونان در بازه زمانی ۱۹۶۰ الی ۱۹۹۳ مورد مطالعه قرار دادند. در این مطالعه با بکارگیری داده‌های بارندگی ماهیانه ۵۰ ایستگاه هواشناسی و استفاده از روش رگرسیون چندگانه برای تعیین درصد مساحت تحت پوشش خشکسالی، منحنی‌های S-A-F بازای شاخص SPI در مقیاس‌های زمانی مختلف در منطقه توسعه دادند (۲۳). میشر و دسای در سال ۲۰۰۵ روابط S-A-F را بازای شاخص خشکسالی SPI برای بازه زمانی ۲۰۰۱-۱۹۶۵ در حوضه رودخانه کانسباتی هند را مورد بررسی قرار دادند. در این مطالعه از روش وزن‌دهی عکس فاصله (IDW) برای میانمایی مقادیر SPI استفاده کردند (۲۸). سانتوس و همکاران در سال ۲۰۱۰ خشکسالی هواشناسی

1- Severity-Area- Frequency

2- Intensity-Area-Frequency

3- Empirical Orthogonal Functions (EOF)

4- Copula functions

خشکسالی در شمال غرب ایران استفاده کردند. ایشان بر اساس آزمون خطا و ضرایب همبستگی دمی، تابع مفصل گالامبوس را به عنوان تابع مفصل برتر در منطقه برای مدل‌سازی مدت و بزرگی خشکسالی معرفی و خصوصیات احتمالاتی توام و دوره‌های بازگشت شرطی در منطقه را مورد تحلیل قرار دادند (۲۵). ردی و گانگولی در مطالعه دیگری در سال ۲۰۱۳ به تحلیل زمانی و مکانی خشکسالی در منطقه کانسباتی هند بر اساس داده‌های شبکه‌بندی شده شده با تفکیک مکانی ۰/۵ درجه با استفاده از روش توابع مفصل (سه تابع مفصل گامبل، فرانک و پلاکت) پرداختند و نمودارهای شدت-مساحت- فراوانی را در این منطقه توسعه دادند (۳۶). کلیه مطالعات مذکور به توانایی و قابلیت بسیار بالا تکنیک توابع مفصل در مدل‌سازی خصوصیات همبسته خشکسالی بصورت دو یا چند متغیره تاکید داشته و ضمناً مرور جامعی از کاربرد توابع مفصل در مطالعه گنست و فاووره و سالوادوری و همکاران گزارش شده است (۶ و ۳۹).

بنابراین در این مطالعه تحلیل منطقه‌ای بزرگی-مساحت تحت پوشش خشکسالی با استفاده از تکنیک توابع مفصل در یکی از حوضه‌های آبریز مهم و نسبتاً پر آب کشور، یعنی حوضه آبریز دریاچه ارومیه که در حال حاضر با شرایط بحرانی کاهش شدید تراز آب دریاچه ارومیه روبرو بوده، انجام پذیرفته است. چنین مطالعه‌ای برای اولین بار برای تحلیل تغییرات زمانی و مکانی منطقه‌ای خشکسالی با تاکید و لحاظ نمودن وابستگی بزرگی و مساحت تحت پوشش خشکسالی بصورت یک تحلیل دو متغیره بزرگی-مساحت تحت پوشش خشکسالی در محدوده مطالعاتی بازای داده‌های ایستگاه‌های بارانسنجی با دامنه قابل توجه پارامترهای آماری داده‌های سالیانه (مانند میانگین، انحراف معیار، چولگی و ضریب خودهمبستگی داخلی داده‌ها) انجام پذیرفته است. این امر بر خلاف مطالعات منتشر شده مذکور و خصوصاً در محدوده مطالعاتی (۱۰، ۲۶ و ۳۰)، با فرض وابستگی هرکدام از خصوصیات خشکسالی مانند مدت و بزرگی خشکسالی، استفاده از داده‌های ایستگاه‌های بارانسنجی با دامنه قابل توجه از مشخصات آماری داده‌ها، استفاده از توزیع‌های حاشیه‌ای رایج و تکیه‌گاهی<sup>۱</sup> و بکارگیری از خانواده‌های مختلف توابع مفصل انجام پذیرفته است. در این مطالعه از داده‌های بارندگی ماهیانه در دوره آماری ۱۹۷۱-۲۰۱۳ در ۲۴ ایستگاه بارانسنجی که بطور یکنواخت در سطح حوضه پراکنده و اکثریت محدوده مطالعاتی را تحت پوشش قرار می‌دهند و معرف مناسبی برای تعیین بارندگی متوسط کل منطقه هستند، استفاده شده است. اهداف اصلی این مطالعه عبارتند از: (۱) مدل‌سازی خصوصیات خشکسالی از قبیل بزرگی و درصد مساحت تحت پوشش خشکسالی در حوضه آبریز دریاچه ارومیه؛ (۲) ارزیابی عملکرد توابع مفصل خانواده‌های مختلف در مدل‌سازی ساختار

## مواد و روش‌ها

### منطقه مورد مطالعه و داده‌ها

دریاچه ارومیه یکی از بزرگترین دریاچه‌های آب شور دنیا است که در شمال غرب ایران قرار دارد. مساحت حوضه آبریز دریاچه ارومیه در حدود ۵۲۰۰۰ کیلومتر مربع و ارتفاع آن بین ۱۲۳۶ الی ۳۷۳۳ متر بوده که توسط کوه‌های زاگرس در همسایگی حوضه رودخانه زاب و کوه‌های سلان در همسایگی حوضه رودخانه ارس قرار دارد. متوسط بارش سالیانه حوضه در حدود ۳۳۴ میلی‌متر (۱۹۷۱-۲۰۱۳) بوده و اقلیم آن بر اساس طبقه‌بندی اقلیمی کوپن- کیگر در محدوده نیمه‌خشک و قاره‌ای (Bsk & Dsa) قرار دارد (۳۴). متأسفانه، وقوع خشکسالی‌های اخیر، افزایش جمعیت و توسعه ناپایدار کشاورزی در منطقه باعث عدم تعادل آبی و در نهایت منجر به کاهش سطح آب دریاچه در سال‌های اخیر شده است. بنابراین، درک واقعی مشخصه‌های خشکسالی منطقه می‌تواند از اهمیت بالایی در مدیریت ریسک خشکسالی حوضه داشته باشد.

در این مطالعه از داده‌های بارندگی ماهیانه ۲۴ ایستگاه بارانسنجی در داخل حوضه آبریز دریاچه ارومیه در دوره آماری ۱۹۷۱-۲۰۱۳ استفاده شده که موقعیت منطقه مطالعاتی و ایستگاه‌های منتخب در شکل (۱) نشان داده شده است. آمار ایستگاه‌های مورد مطالعه بدون گپ آماری بوده و کیفیت داده‌ها قبل از بکارگیری آن‌ها در مدل‌سازی، از نظر همگنی، تصادفی بودن و روند کنترل شده است. نتایج بیانگر همگنی، تصادفی بودن و عدم وجود روند داده‌ها بوده که به دلیل محدودیت صفحات مقاله ارائه نشده است.

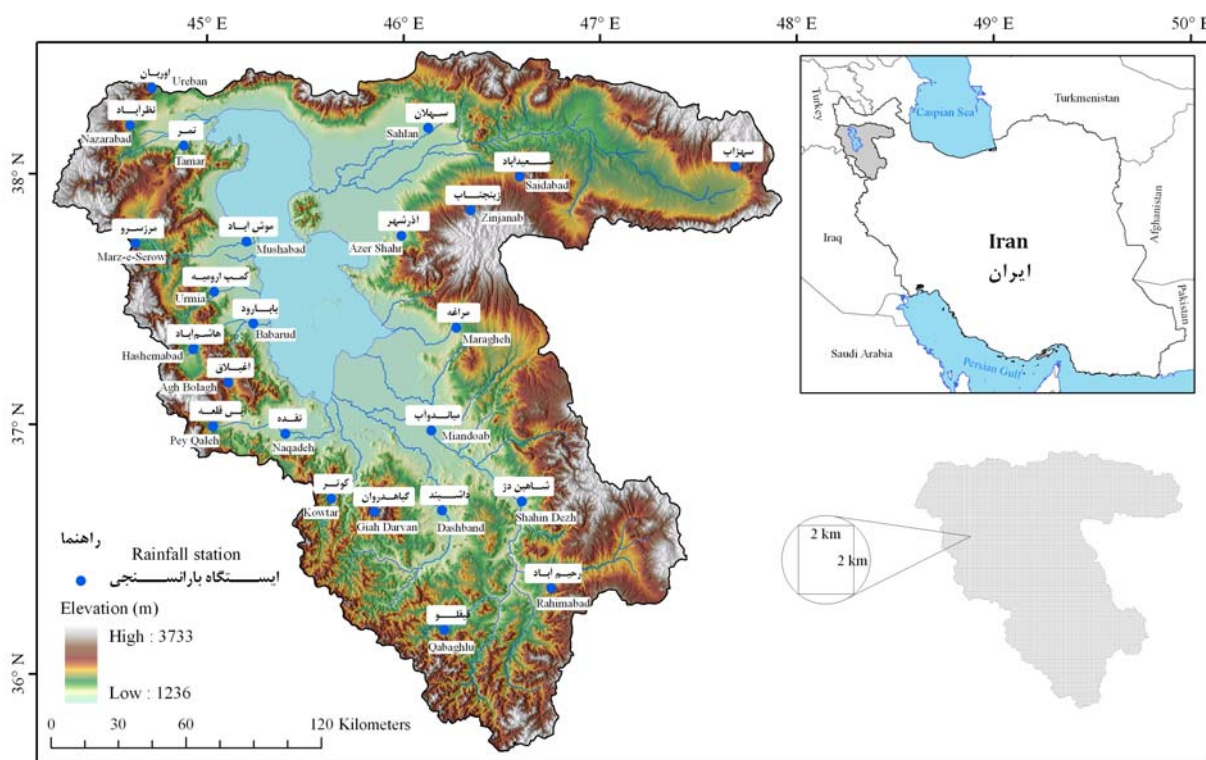
مشخصات آماری بارندگی‌های سالیانه در ایستگاه‌های بارانسنجی منتخب در جدول (۱) ارائه شده، بطوریکه میانگین بارش سالیانه در محدوده مطالعاتی از ۲۳۹/۷ تا ۵۴۲/۶ میلی‌متر متغیر بوده و ضریب تغییرات سالیانه (CV) آن در بازه ۲۲ الی ۴۱ درصد می‌باشد. مقادیر چولگی (Skew) و ضریب همبستگی مرتبه اول (p) داده‌ها نیز در اکثر ایستگاه‌ها مثبت می‌باشد. این دامنه تغییرات قابل توجه رخداد‌های حدی خشکسالی می‌تواند داده‌های بسیار بارز و مناسب جهت ارزیابی خصوصیات توام خشکسالی و مدیریت ریسک خشکسالی حوضه آبریز دریاچه ارومیه باشد.

### مشخصات خشکسالی

در این مطالعه از شاخص خشکسالی SPI برای پایش خشکسالی و استخراج مقادیر شاخص SPI یک‌ماهه استفاده شده است. شاخص

احتمالات توام خشکسالی می‌تواند از اهمیت بالایی برخوردار باشد (۳۱).

خشکسالی SPI بعنوان مناسبترین شاخص خشکسالی در کاهش میزان عدم قطعیت انتخاب نامناسب شاخص خشکسالی در تحلیل



شکل ۱- موقعیت منطقه مطالعاتی و ایستگاه‌های بارانسنجی منتخب در حوضه آبریز دریاچه ارومیه

Figure 1- Location of study area and rainfall stations in Lake Urmia basin

محاسبه می‌گردد:

$$A_t = \frac{\sum_{i=1}^{N_p} (I[SPI_{i,t} \leq SPI_{thr}] \times A_i)}{\sum_{i=1}^{N_p} A_i} \quad (1)$$

که در آن،  $I[.]$  تابع نشانگر منطقی می‌باشد که مقدار آن بسته به درست یا نادرست بودن عبارت داخل کروشه می‌تواند برابر یک و یا صفر باشد،  $SPI_{i,t}$  مقدار آماره شاخص در گام زمانی  $t$ ،  $SPI_{thr}$  مقدار آستانه خشکسالی شاخص  $SPI$ ،  $A_i$  برابر با مساحت متاثر از خشکسالی در پلیگون  $i$ ام و  $N_p$  برابر با تعداد کل پلیگون‌ها در منطقه می‌باشد.

(۲) بزرگی خشکسالی ( $S_t$ ): برابر با مجموع مقادیر  $SPI$  متوالی در هر شبکه سلولی و هر گام زمانی که زیر حد آستانه یا تحت خشکسالی قرار گیرد، که بصورت رابطه (۲) تعریف می‌شود:

$$S_t = -\frac{1}{N_{p\_D}} \sum_{i=1}^{N_{p\_D}} (I[SPI_{i,t} \leq SPI_{thr}] \times SPI_{i,t}) \quad (2)$$

محاسبه مقادیر شاخص خشکسالی  $SPI$  برای هر دوره زمانی و در هر ایستگاه بعنوان یک موقعیت مکانی بدین ترتیب است: ابتدا توزیع آماری مناسب بر آمار بلندمدت بارندگی‌ها برازش داده شده، سپس تابع تجمعی با استفاده از احتمالات مساوی به توزیع نرمال تبدیل می‌گردد. سپس مقادیر آماره  $SPI$  بر اساس رابطه  $SPI_i = (P_i - \bar{P}) / \delta$  که در آن  $P_i$  به ترتیب آماره شاخص و بارندگی نرمال شده در  $P$ ، میانگین بارندگی نرمال شده و  $\delta$ : انحراف معیار بارندگی نرمال شده، می‌باشد. در نهایت پریودهای خشک یا خشکسالی بازای مقادیر آماره شاخص  $SPI$  کمتر از یک حد آستانه مشخص (در سه کلاس خشکسالی ضعیف، متوسط و شدید) تعیین می‌شود. بطور خاص، مشخصات خشکسالی مورد استفاده در این مطالعه بقرار زیر می‌باشند:

(۱) درصد مساحت تحت پوشش خشکسالی ( $A_t$ ): برابر با درصدی از مساحت کل در هر گام زمانی است که مقدار آماره شاخص  $SPI$  کمتر از حد آستانه مشخص باشد. بر این اساس، درصد مساحت تحت پوشش خشکسالی ( $A_t$ ) برای هر گام زمانی  $t$  بصورت رابطه (۱)

جدول ۱- مشخصات آماری داده‌های بارندگی سالیانه ایستگاه‌های منتخب در دوره آماری (۱۹۷۱-۲۰۱۳)

Table 1- Statistical properties of annual rainfall data (1971-2013) in the selected stations

ایستگاه Station	میانگین average (mm)	CV	$\rho$	Skew	ایستگاه Station	میانگین average mm	CV	$\rho$	Skew
آغبالق Agh Bolagh	421.8	0.28	0.37	0.30	نظرآباد Nazarabad	413.1	0.39	0.20	0.83
آذرشهر Azer Shahr	239.7	0.31	0.31	-0.15	پی قلعه Pey Qaleh	490.0	0.25	0.41	0.55
بابارود Babarud	341.7	0.30	0.11	0.76	قبقلو Qabaghlu	414.4	0.27	0.09	0.28
داشبنند Dashband	396.3	0.41	0.48	1.48	رحیم آباد Rahimabad	365.0	0.32	0.24	0.43
گیاهدوران Giah Darvan	456.7	0.33	-0.03	1.00	سهلان Sahlan	258.9	0.23	-0.02	-0.28
هاشم آباد Hashemabad	542.6	0.34	0.35	0.84	سہزاب Sahzab	301.2	0.33	0.36	0.77
کوثر Kowtar	377.4	0.29	0.17	-0.11	سعیدآباد Saidabad	373.0	0.27	0.12	0.48
مراغه Maragheh	316.3	0.22	0.03	0.09	صائین دز Shahin Dezh	290.6	0.33	0.29	-0.10
مرز سرو Marz-e-Serow	369.3	0.26	0.16	0.09	تمر Tamar	240.5	0.27	0.14	0.23
میاندوآب Miandoab	303.4	0.29	0.16	0.89	اوربان Ureban	311.4	0.26	0.01	0.03
موش آباد Mushabad	245.2	0.29	0.20	0.40	ارومیه Urmia	364.1	0.27	0.01	0.69
نقده Naqadeh	329.8	0.31	0.21	-0.06	زینجاناب Zinjanab	294.5	0.24	-0.02	0.21

توابع مفصل توسط اسکالر (۴۸)، جو (۱۵)، نلسن (۳۲) و سالوادوری و همکاران (۳۹) توسعه یافته است. از آن زمان به بعد، توابع مفصل بطور گسترده در زمینه‌های مختلفی از جمله مالی، مدیریت ریسک، هواشناسی و هیدرولوژی مورد استفاده قرار گرفته است.

بر اساس تئوری اسکالر (۲۰۰۶)، اگر  $F_{XY}$  یک تابع توزیع دومتغیره از متغیر تصادفی  $X$  و  $Y$  با توابع توزیع حاشیه‌ای  $F_X$  و  $F_Y$  باشند، یک مفصل  $C$  (تابع توزیع تجمعی مفصل) بصورت رابطه (۳) وجود خواهد داشت:

$$F_{XY}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y)) = C(u, v) \quad (3)$$

به همین ترتیب رابطه فوق را می‌توان برای تابع چگالی احتمال توام بر اساس توابع چگالی احتمال حاشیه‌ای  $F_X(x)$  و  $F_Y(y)$  بصورت رابطه (۴) بدست آورد:

$$f_{X,Y}(x, y) = c(F_X(x), F_Y(y)) f_X(x) f_Y(y) \quad (4)$$

که در آن  $c$  تابع چگالی احتمال مفصل بوده و از رابطه (۵) تعیین می‌گردد:

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} \quad (5)$$

که در آن  $N_{p,D}$  برابر با تعداد کل پلیگون‌های متأثر از خشکسالی می‌باشد.

بر اساس تعریف شاخص SPI، مقادیر کمتر از -۱ در هر دوره به عنوان دوره خشک طبقه‌بندی می‌شود (۲۴ و ۲۹). این درحالی است برخی محققین معتقد هستند که دوره‌های شبه خشک متوالی با SPI منفی (بزرگتر از -۱) نرسیده به  $-1 < SPI < 0$  با مقادیر تجمعی کمبود زیاد (یعنی بزرگی خشکسالی زیاد) اثر منفی بیشتری نسبت به دوره‌های کوتاه‌مدت با SPI کمتر از -۱ برای یک اکوسیستم دارند (۴۴). لذا در این مطالعه حد آستانه خشکسالی مقدار صفر برای مدل‌سازی منطقه‌ای خشکسالی در منطقه مورد مطالعه در نظر گرفته شده است.

### تابع مفصل و خصوصیات آن

مفصل یک مدل تصادفی و مبتنی بر احتمال می‌باشد. بعبارت دیگر، مفصل تابعی برای مدل‌سازی دو یا چند متغیر تصادفی می‌باشد (۳۲). تابع مفصل می‌تواند توزیع‌های حاشیه‌ای را به سادگی به توزیع‌های چندگانه، متصل کند. ساختار توزیع چندمتغیره با استفاده از

توابع مفصل از خانواده‌های مختلفی تشکیل شدند که در این مطالعه از هفت تابع مفصل از خانواده‌های مختلف، از جمله خانواده ارشمیدسی (کلایتون، فرانک، گامبل و جو)، خانواده مقادیر حدی (گالامبوس)، خانواده بیضوی (نرمال) و خانواده مفصل‌های متفرقه

توابع مفصل از خانواده‌های مختلفی تشکیل شدند که در این مطالعه از هفت تابع مفصل از خانواده‌های مختلف، از جمله خانواده ارشمیدسی (کلایتون، فرانک، گامبل و جو)، خانواده مقادیر حدی (گالامبوس)، خانواده بیضوی (نرمال) و خانواده مفصل‌های متفرقه

جدول ۲- روابط CDF توابع مفصل مورد استفاده در مطالعه  
Table 2- The copulas CDF used in this study

تابع مفصل Copula	C(u,v)	محدوده پارامتر Parameter space
کلایتون Clayton	$(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}$	$\theta \geq -1$
فرانک Frank	$-\frac{1}{\theta} \ln \left[ 1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right]$	$\theta \neq 1$
گامبل Gumbel	$\exp \left\{ - \left[ (-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\}$	$\theta \geq 1$
جو Joe	$1 - \left[ (1-u)^{\theta} + (1-v)^{\theta} - (1-u)^{\theta} (1-v)^{\theta} \right]^{\frac{1}{\theta}}$	$\theta \geq 1$
گالامبوس Galambos	$uv \exp \left\{ \left[ (-\ln u)^{-\theta} + (-\ln v)^{-\theta} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\}$	$\theta \geq 0$
نرمال Normal	$\Phi_{\theta}(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))$	$-1 \leq \theta \leq 1$
پلاکت Plackett	$\frac{1}{2} \frac{1}{\theta - 1} \left\{ 1 + (\theta - 1)(u + v) - \left[ (1 + (\theta - 1)(u + v))^2 - 4\theta(\theta - 1)uv \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$	$\theta \geq 0$

که در آن،  $u$  و  $v$  توابع توزیع تجمعی،  $\theta$  پارامتر وابستگی توابع مفصل،  $\Phi$  و  $\phi$  بترتیب تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی احتمال نرمال استاندارد می‌باشند.

نهایت، انتخاب بهترین تابع مفصل برخوردار می‌باشد. از آنجائیکه متغیر درصد مساحت تحت پوشش خشکسالی (A) دارای محدوده مشخصی بوده و دامنه تغییرات آن بین مقدار ۰ تا ۱۰۰ تغییر می‌کند، لذا استفاده از توزیع‌های تکیه‌گاهی<sup>۳</sup> برای برازش با داده‌های متغیر A اجتناب ناپذیر خواهد بود (۱۱). در این مطالعه از توزیع بتا<sup>۴</sup> به عنوان یکی از توزیع‌های تکیه‌گاهی، برای برازش داده‌های درصد مساحت تحت پوشش خشکسالی استفاده شده و همچنین از شش توزیع احتمالی نمایی، گاما، گامبل، لاگ نرمال دوپارامتری، لجستیک و ویبول برای برازش و انتخاب بهترین توزیع حاشیه‌ای متغیر بزرگی خشکسالی استفاده شده است. برای برآورد پارامترهای توزیع حاشیه‌ای از روش حداکثر درست‌نمایی<sup>۵</sup> (MLE) و برای انتخاب بهترین تابع توزیع حاشیه‌ای متغیرها و آزمون نکویی برازش توزیع‌های احتمال از معیار اطلاعاتی آکائیک<sup>۶</sup> (AIC) و معیار اطلاعاتی بی‌زین<sup>۱</sup> (BIC) بر

برای بکارگیری تئوری مفصل در تحلیل احتمال توام دو متغیره متغیرهای تصادفی  $x$  و  $y$  ارزیابی وابستگی بین متغیرها از اهمیت بالایی برخوردار است. چراکه در صورت وجود همبستگی بین دو متغیر تصادفی، امکان ایجاد و تحلیل دومتغیره بازای توابع مفصل، معنی‌دار خواهد بود. در این مطالعه علاوه بر معیارهای اندازه‌گیری کمی همبستگی بین دو متغیر (مانند اسپیرمن و کندال) (۵۶)، از معیارهای گرافیکی که اخیراً توسعه پیدا کردند (نمودار پراکنندگی رتبه‌ای، نمودار کی<sup>۱</sup> و نمودار کندال<sup>۲</sup>)، برای اندازه‌گیری همبستگی بین دو متغیر بزرگی و درصد مساحت تحت پوشش خشکسالی استفاده شده است. جزئیات بیشتر در مورد معیارهای گرافیکی همبستگی نمودار کی و کندال را می‌توان در منبع گنست و فاووره (۶) یافت.

#### توزیع حاشیه‌ای مشخصه‌های خشکسالی

یکی از گام‌های کلیدی در برازش توابع مفصل با خصوصیات مختلف خشکسالی، تعیین مناسب‌ترین توزیع حاشیه‌ای برای هریک از مشخصه‌های خشکسالی بوده و از اهمیت بسیار بالایی در تحلیل و در

3- Bounded distribution

4- Beta

5- Maximun Likelihood Estimation

6- Akaike Information Criterion

1- Chi plot

2- Kendall plot

مناسبی دارد (۴۷). مدل با بیشترین (کمترین) مقدار لگاریتم حداکثر درستی (AIC، BIC و RMSE) نشان‌دهنده مناسب‌ترین تابع مفصل می‌باشد (۴، ۱۷، ۲۷، ۴۴ و ۵۴).

ضمناً جهت آزمون برآزش گرافیکی عملکرد توابع مفصل مورد مطالعه، ۳۰۰۰۰ جفت حاشیه‌های تصادفی بر اساس روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو برای هر کدام از توابع مفصل تولید شد و سپس با استفاده از توابع توزیع حاشیه‌های متغیرها به میدان حقیقی داده‌ها انتقال داده شد. این امر جهت ارزیابی همپوشانی مقادیر مشاهداتی بازای توابع مفصل مختلف، بویژه در مقادیر کران‌های بالا و پایین می‌تواند از اهمیت بالایی در انتخاب نوع تابع مفصل برخوردار باشد.

### دوره‌های بازگشت شرطی بازای توابع مفصل

دوره بازگشت شرطی  $T_{S|A}(s|a)$  بزرگی خشکسالی بازای مساحت تحت پوشش خشکسالی  $A=a$  را می‌توان بصورت رابطه (۸) نوشت:

$$T_{S|A}(s|a) = \frac{\zeta}{1 - C_{S|A=a}} \quad (8)$$

که در آن،  $\zeta = \frac{N}{n}$ ؛  $N$ : طول دوره مقادیر SPI بر حسب سال،  $n$ : تعداد رویدادهای خشکسالی در مدت  $N$  سال بر حسب سال،  $C_{S|A=a}$ : بیانگر تابع توزیع تجمعی شرطی بزرگی خشکسالی بازای درصد مساحت تحت پوشش آن. توزیع شرطی توابع توام مفصل از رابطه (۹) تعیین می‌گردد:

$$C_{S|A=a} = \frac{\partial C(F_S(s), F_A(a))}{\partial F_A(a)} \quad (9)$$

در این مطالعه برای تعیین بزرگی خشکسالی به عنوان یکی از مهمترین مشخصه خشکسالی در منطقه، ابتدا مقادیر شاخص SPI در هر کدام از ایستگاه‌های منتخب محاسبه شد. سپس کل منطقه به شبکه‌های بسیار کوچک با اندازه سلولی  $2000 \times 2000$  متر (مطابق با شکل ۱) تقسیم‌بندی گردید. با یک کد برنامه‌نویسی، فواصل بین مرکز شبکه‌ها (حدود ۱۳۴۰۰ شبکه) با تمام ایستگاه‌های منتخب محاسبه و مقدار شاخص SPI در هر یک از سلول‌ها با در نظر گرفتن آستانه شاخص خشکسالی SPI برابر صفر و با اعمال فاصله و وزن هر کدام از ایستگاه‌ها (روش نسبت عکس مجذور فاصله)، محاسبه گردید. در نهایت مساحت تحت پوشش خشکسالی در منطقه با جمع مساحت هر یک از شبکه‌ها بازای مقادیر کمتر از آستانه، محاسبه و به عنوان مساحت تحت پوشش خشکسالی منطقه در نظر گرفته شد.

در مرحله بعد، سری‌های استخراج شده بصورت تک‌متغیره با توزیع آماری مختلف برآزش داده شده و توزیع حاشیه‌ای برتر

اساس رابطه (۶) و (۷) استفاده گردید (۲۲، ۵۴ و ۵۵).

$$AIC = -2 \ln L + 2p \quad (6)$$

$$BIC = -2 \ln L + \ln(n) \times p \quad (7)$$

که در آن،  $L$  برابر با مقدار حداکثر درستی،  $p$  تعداد پارامترها و  $n$  تعداد داده‌ها می‌باشند.

### برآورد پارامتر تابع مفصل

روش‌های رایج مورد استفاده برای برآورد پارامتر توابع مفصل شامل روش گشتاورها<sup>۲</sup> (۸)، روش تابع منطقی برای حاشیه‌ها (IFM)<sup>۳</sup> (۱۵) و روش حداکثر شبه درستی (MPL)<sup>۴</sup> (۷) می‌باشند. در مقایسه با دیگر روش‌های برآورد پارامترهای توابع مفصل، روش IFM به عنوان یک روش کامل پارامتری، یک روش متداول برای برآورد پارامتر توابع چندبعدی شناخته شده (۱۵، ۱۶) و مورد استفاده بسیاری از محققین قرار گرفته است (۱، ۲۰، ۲۱، ۲۶، ۳۸، ۴۴، ۴۵ و ۵۴). بنابراین، در این مطالعه روش IFM جهت تخمین پارامترهای توابع مفصل بکار گرفته شد. در این روش، ابتدا پارامترهای توزیع حاشیه‌ای با استفاده از روش حداکثر درستی محاسبه شده و سپس پارامتر تابع مفصل ( $\theta$ ) با استفاده از حداکثر نمودن تابع لگاریتم درستی بدست می‌آید. به عنوان نمونه، تابع لگاریتم درستی تابع چگالی مفصل، برای دو متغیر درصد مساحت تحت پوشش خشکسالی و بزرگی خشکسالی بصورت رابطه (۸) می‌باشد (۴۴).

(۸)

$\ln L(a, s; \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \theta) = \ln L_C(F_A(a), F_S(s); \theta) + \ln L_A(a; \alpha_1, \alpha_2) + L_S(s; \beta_1, \beta_2)$   
که در آن  $\ln L_C$  تابع لگاریتم درستی مفصل و  $\ln L_A$ ،  $\ln L_S$  بترتیب توابع لگاریتم درستی برای توزیع‌های حاشیه‌ای درصد مساحت تحت پوشش خشکسالی و بزرگی خشکسالی می‌باشند. با جایگذاری پارامترهای برآوردی  $\hat{\alpha}_i$ ،  $\hat{\beta}_i$ ، تابع لگاریتم درستی  $\ln L$  برای برآورد پارامتر مفصل  $\hat{\theta}$  بیشینه می‌شود.

انتخاب یک تابع مفصل مناسب برای مدل‌سازی صحیح وابستگی بین توزیع‌های حاشیه‌ای از اهمیت بالایی برخوردار می‌باشد. در این مطالعه برای ارزیابی عملکرد توابع مفصل برآزش یافته از معیار لگاریتم حداکثر درستی، معیار اطلاعاتی آکائیک (AIC)، معیار اطلاعاتی بیزین (BIC) و RMSE استفاده شده است. نتایج مطالعات مختلف نشان داده است که عملکرد معیار BIC در نمونه‌های زیاد بهتر بوده، در حالیکه معیار AIC در تعداد نمونه‌های کمتر، عملکرد

- 1 -Bayesian Information Criterion
- 2- Method of moments
- 3 -Inference Function for Margins
- 4 -Maximum Pseudo Likelihood

خط نیمساز باشند، همبستگی مثبت (نزدیک‌تر شدن داده‌ها به خط منحنی بیانگر همبستگی بیشتر می‌باشد) و در صورتیکه نقاط در پایین خط نیمساز قرار گیرند، همبستگی منفی خواهد بود (۹). بر اساس شکل (۵-ج) نیز همبستگی مثبت بین دو متغیر قابل مشاهده است، بطوریکه جفت داده‌ها با مقادیر کمتر، به دلیل نزدیکی به نیمساز، دارای همبستگی کمتری نسبت به دیگر نقاط می‌باشند.

### توزیع‌های حاشیه‌ای متغیرهای خشکسالی

در توابع مفصل، توابع توزیع توام، تابعی از توابع توزیع تک متغیره حاشیه‌ای می‌باشد. در این مطالعه شش تابع توزیع احتمال رایج برای برازش با متغیر بزرگی خشکسالی استفاده گردید. همچنین از آنجائیکه متغیر درصد مساحت تحت پوشش خشکسالی (A)، دارای محدوده مشخصی بوده و دامنه تغییرات آن بین مقدار ۰ تا ۱۰۰ تغییر می‌کند، لذا از توزیع بتا (Beta)، به عنوان یکی از توزیع‌های تکیه‌گاهی برای برازش داده‌های درصد مساحت تحت پوشش خشکسالی استفاده شد. پارامترهای توزیع‌ها با استفاده از روش حداکثر درست‌نمایی برآورد شدند. سپس عملکرد توزیع‌های انتخابی برای متغیر بزرگی خشکسالی با استفاده از آزمون‌های نکویی برازش AIC، BIC مورد ارزیابی قرار گرفتند.

نتایج بهترین توزیع آماری برازش یافته بر دو متغیر بزرگی و درصد مساحت تحت پوشش خشکسالی به‌همراه پارامترهای توزیع‌های برازش یافته در جدول (۳) نشان داده شده است. بر اساس نتایج جدول (۳)، بازای معیارهای AIC و BIC، توزیع لاگ‌نرمال دوپارامتری به عنوان بهترین توزیع برای متغیر بزرگی خشکسالی انتخاب گردید. منحنی تابع چگالی احتمال (PDF)، منحنی تابع توزیع تجمعی (CDF)، منحنی احتمال - احتمال (P-P plot) و منحنی چندق - چندق (Q-Q plot) توزیع‌های برازش یافته (توزیع‌های لاگ‌نرمال دوپارامتری و بتا بترتیب برای متغیرهای A و S) در شکل (۶) ارائه شده است. با توجه به برازش گرافیکی مناسب توزیع بتا با داده‌های مشاهداتی (شکل (۶))، توزیع بتا به عنوان توزیع حاشیه‌ای مناسب برای متغیر A در نظر گرفته شد.

### ساختار وابستگی توام بر اساس توابع مفصل

بعد از انتخاب توزیع حاشیه‌ای متغیرها، توزیع توام خصوصیات خشکسالی با استفاده از ۷ تابع مفصل کلایتون، گامبل، فرانک، جو، گلامبوس، پلاکت و نرمال برای منطقه مطالعاتی مدل‌سازی گردید. پارامترهای توابع مفصل با استفاده از روش IFM برآورد گردید. در نهایت تابع مفصل مناسب بر اساس آماره چهار معیار Log-likelihood، AIC، BIC و RMSE تعیین و انتخاب شده است (۲۱)، (۵۶). معیارهای ارزیابی مذکور میزان انحراف مقادیر برآوردی و

تک‌متغیره برای هر کدام از متغیرهای S و A تعیین گردید. سپس مقادیر توابع توزیع تجمعی متغیرها با توابع مفصل مختلف برازش داده شده و مناسب‌ترین تابع مفصل بازای معیارهای مختلف انتخاب گردید. در انتها بازای تابع مفصل منتخب در منطقه، منحنی بزرگی - مساحت - فراوانی برای محدوده مطالعاتی تعیین گردید.

### نتایج و بحث

توزیع فراوانی مقادیر ماهیانه شاخص SPI در کل ایستگاه‌های منتخب از سال ۱۹۷۱ الی ۲۰۱۳ بازای ۲۵، ۵۰ و ۷۵ درصد وقوع در شکل (۲-الف) نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که در طول دوره آماری (۴۳ سال) دوره‌های خشک و تر بطور متناوب و بدون یک الگو مشخص در منطقه تکرار شده است. ضمناً مقادیر ماهیانه شاخص SPI برای داده‌های ایستگاه ارومیه واقع در غرب دریاچه ارومیه در شکل (۲-ب) نشان داده شده است. روند تغییرات مقادیر SPI در این ایستگاه نیز دارای رفتار مشابهی با رفتار کلی شاخص SPI در کل منطقه است.

### مشخصه‌های خشکسالی (بزرگی و مساحت تحت پوشش خشکسالی)

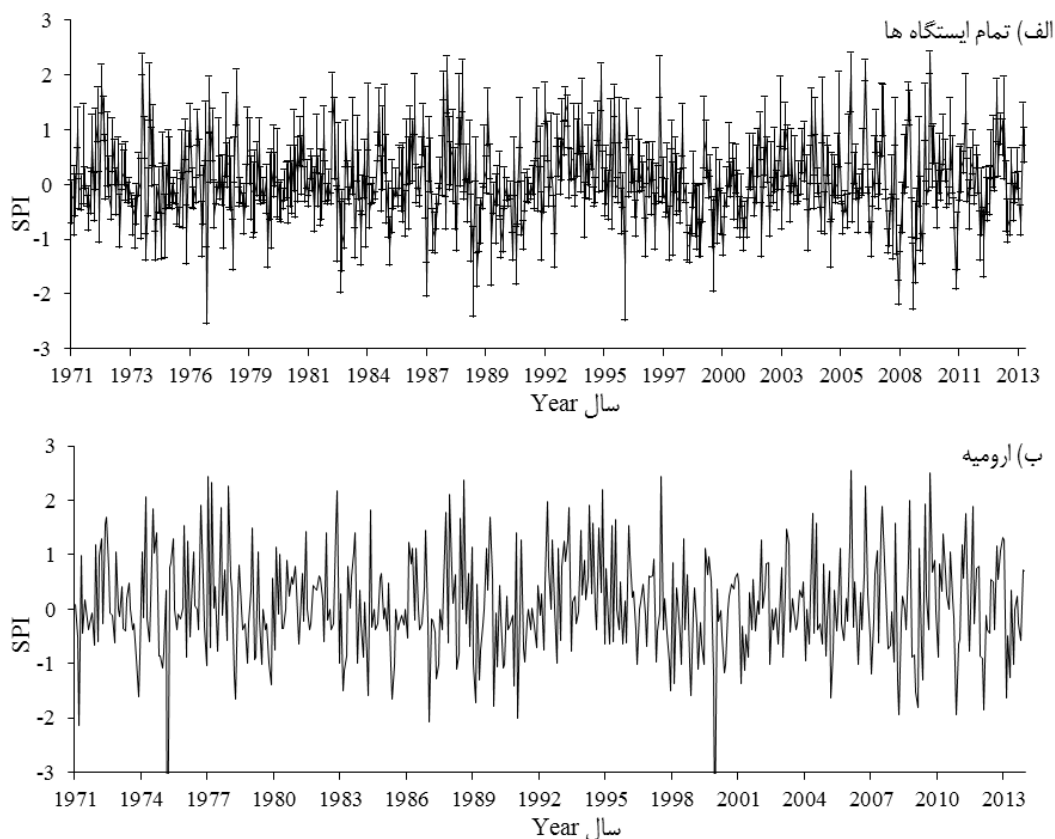
تغییرات سری زمانی و نمودار پراکندگی دو متغیر بزرگی و درصد مساحت تحت پوشش خشکسالی در کل محدوده مطالعاتی بترتیب در شکل‌های (۳) و (۴) نشان داده شده است. همانطوریکه مشاهده می‌گردد، اکثریت محدوده مطالعاتی (حوضه آبریز دریاچه ارومیه) متأثر از رفتارهای کرانه‌ای اقلیمی (خشکسالی یا ترسالی) می‌باشد. درحالیکه رفتارهای نیمه یا شبه‌خشک دارای پوشش مساحت متفاوت با پراکندگی قابل توجه در محدوده مطالعاتی بوده و با افزایش بزرگی خشکسالی مساحت بیشتری از حوضه آبریز را در بر می‌گیرند.

مقدار همبستگی دو متغیر خشکسالی مذکور بازای معیارهای اندازه‌گیری رتبه‌ای اسپیرمن و کندال به ترتیب برابر با ۰/۸۱۴ و ۰/۶۱۷ با مقدار  $p^1$  برابر ۰/۰۰۰ بوده که بیانگر همبستگی معنی‌دار بین متغیرها در سطح ۹۵ درصد می‌باشد. در شکل (۵) نیز همبستگی گرافیکی دو متغیر خشکسالی A و S نشان داده شده است. بر اساس نمودار پراکندگی رتبه‌ای دو متغیر (شکل ۵-الف) همبستگی مثبت دو متغیر قابل مشاهده است. بر اساس نمودار کی (شکل ۵-ب)، مشاهده می‌شود که اکثر نقاط در بالای محدوده اطمینان (برای سطح اطمینان ۹۵ درصد برابر با  $1.78/\sqrt{n}$  می‌باشد که در آن n برابر تعداد داده‌ها است) قرار دارند که بیانگر وجود همبستگی مثبت معنی‌دار بین دو متغیر می‌باشد (۵). بر اساس نمودار کندال، در صورتیکه نقاط بالای

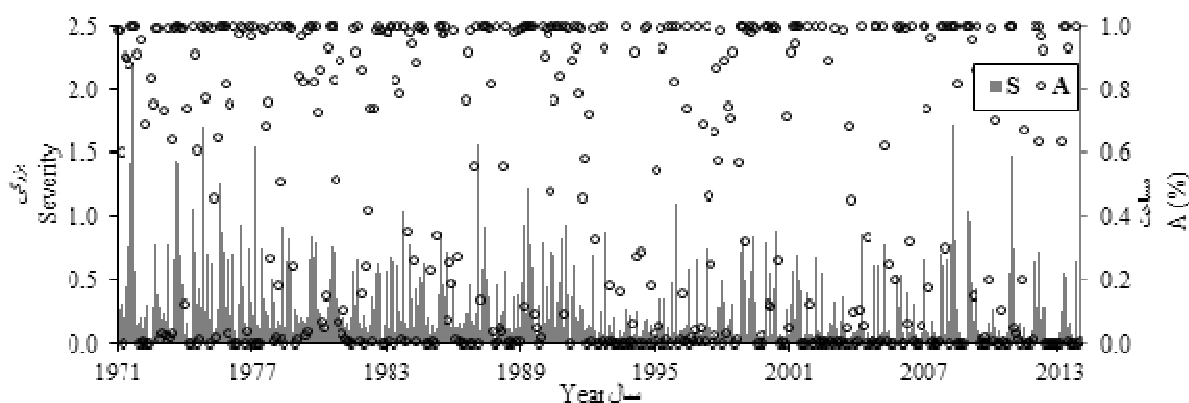


مدل‌بندی توزیع توام دومتغیره بزرگی و درصد مساحت تحت پوشش خشکسالی بازای هفت تابع مفصل برای محدوده مطالعاتی در جدول (۴) خلاصه و ارائه شده است.

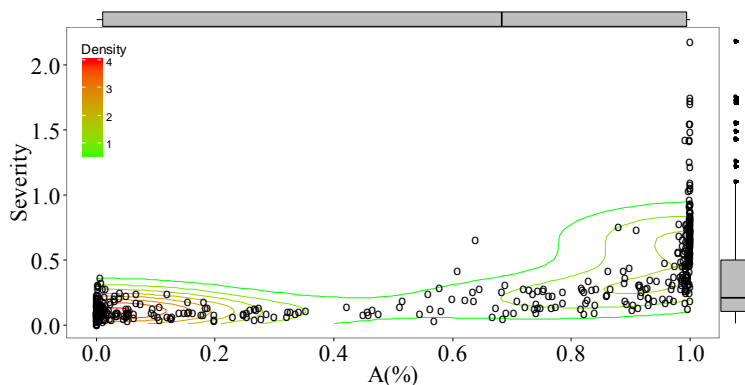
مشاهداتی را بطور کمی و معنی‌داری خلاصه می‌کنند و توابع مفصل مناسب یا برتر با کمترین (بیشترین) مقدار AIC، BIC و RMSE (Log-likelihood) تعیین یا معرفی می‌شود (۴، ۱۷، ۴۴، ۵۳). نتایج



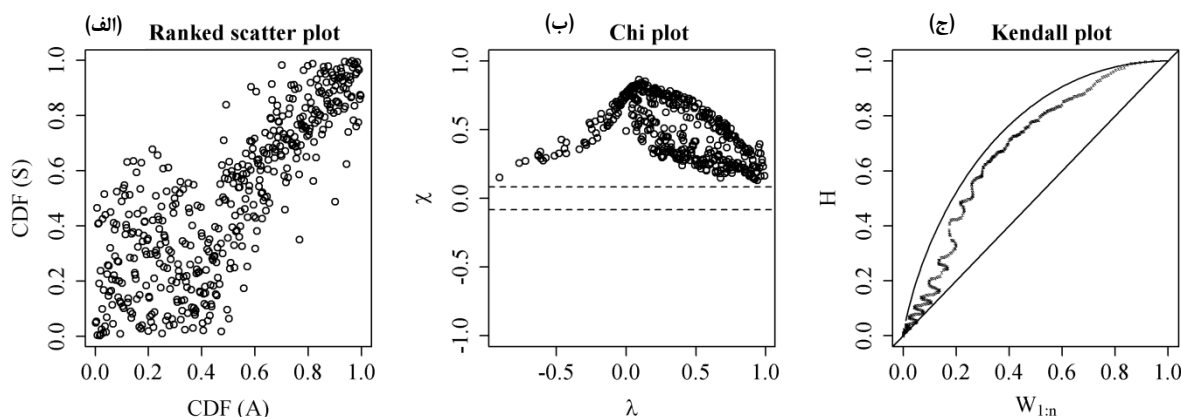
شکل ۲- سری‌های زمانی ماهیانه شاخص SPI در کل ایستگاه‌ها (الف)، در ایستگاه ارومیه (ب)  
Figure 2- Monthly time series of SPI in total stations (a) and Urmia station (b)



شکل ۳- سری‌های زمانی بزرگی و درصد مساحت تحت پوشش خشکسالی در دوره آماری ۱۹۷۱-۲۰۱۳  
Figure 3- Time series of drought severity and percent of area under drought (1971-2013)



شکل ۴- نمودار پراکندگی و باکس پلات دو متغیر بزرگی و درصد مساحت تحت پوشش خشکسالی  
Figure 4- Scatter plot and histogram of drought severity and percent of area under drought



شکل ۵- همبستگی گرافیکی بین متغیرهای خشکسالی (الف) نمودار پراکندگی رتبه‌ای، (ب) نمودار کی و ج) نمودار کندال  
Figure 5- Graphical dependence a) Ranked scatter plot, b) Chi plot and c) Kendall plot

جدول ۳- نتایج برازش توزیع‌های آماری با متغیرهای خشکسالی A و S

Table 3- The results of the goodness of fit test of drought A and S variables

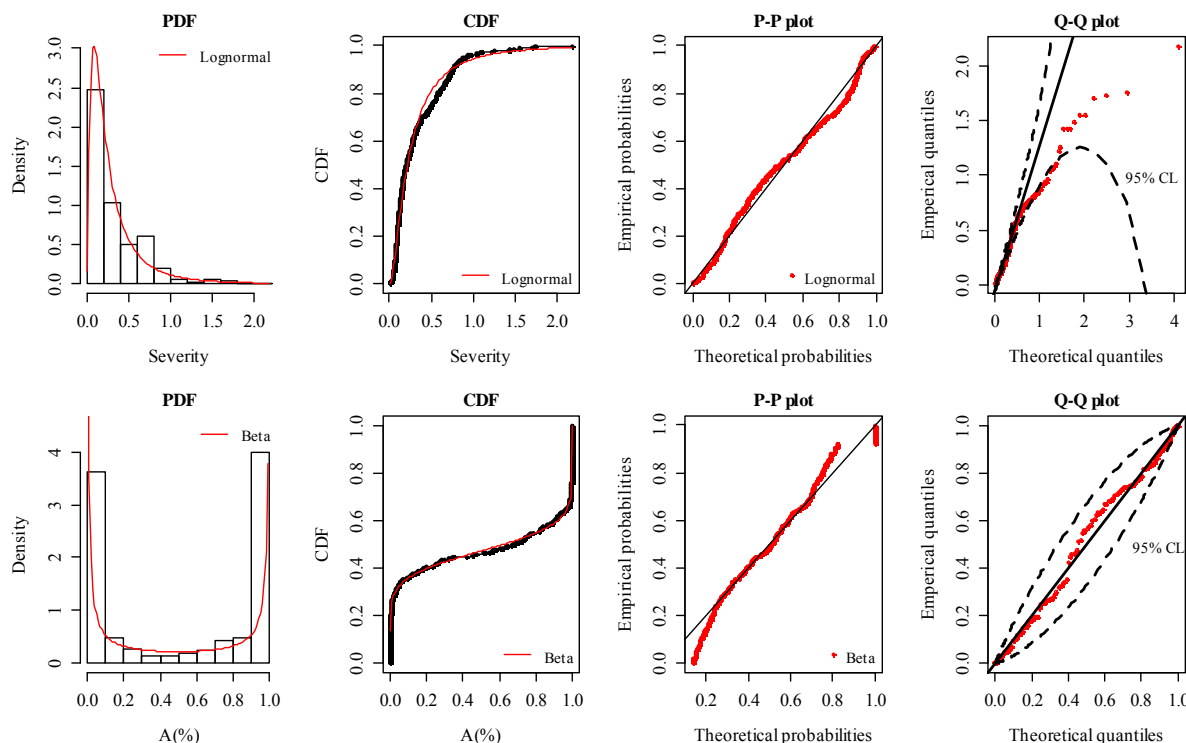
متغیر خشکسالی Drought variable	توزیع Distribution	پارامترهای توزیع Parameters of distribution	آکائیک AIC	بیزین BIC
بزرگی Severity (S)	Exponential	(rate) (3.001)	-89.9	-85.7
	Gamma	(shape, rate) (1.297, 3.892)	-106.0	-97.7
	Gumbel	(mu, sigma) (0.202, 0.196)	41.5	49.8
	Log Normal	(meanlog, sdlog) (-1.531, 0.958)	<b>-140.9</b>	<b>-132.6</b>
	Logistic	(location, scale) (0.281, 0.165)	209.9	218.2
مساحت تحت پوشش خشکسالی Percent of area under drought (A)	Weibull	(shape, scale) (1.116, 0.348)	-97.2	-89.0
	Beta	(shape1, shape2) (0.137, 0.123)	-	-

معیارهای ارزیابی مذکور نسبت به سایر توابع مفصل، به عنوان تابع مفصل برتر برای مدل‌سازی توام متغیرهای بزرگی و درصد مساحت تحت پوشش خشکسالی برای منطقه مطالعاتی انتخاب گردید. نمودار پراکندگی جفت نمونه‌های تصادفی تولیدی (نقاط خاکستری) بازای ۳۰۰۰۰ جفت حاشیه‌های تصادفی تولید شده بر اساس شبیه‌سازی مونت کارلو و نمونه‌های مشاهداتی (نقاط مشکی)

بر اساس نتایج جدول (۴)، سه تابع مفصل گامبل، جو و گالامبوس دارای عملکرد ضعیفی بوده و برای مدل‌بندی احتمال توام بزرگی و درصد مساحت تحت پوشش خشکسالی در محدوده مطالعاتی مناسب بنظر نمی‌رسند و استفاده از سه تابع مفصل مذکور در مناطق مختلف مطالعاتی نیز بایستی همراه با تأمل و احتیاط باشد. در این میان تابع مفصل فرانک با دارا بودن آماره بسیار مناسب‌تری از

شکل‌های (۷) و (۸)، عملکرد توابع مفصل مختلف بصورت گرافیکی بطور روشنتری نمایش داده شده است. بطور موكد، شكل‌های پراكنده‌گی مذکور نشان می‌دهد كه عملکرد تابع مفصل فرانك در توجیه داده‌های مشاهداتی بسیار عالی بوده است.

در شكل (۷) و (۸) بترتیب بازای مقادیر تابع توزیع تجمعی و داده‌های مشاهداتی نشان داده شده است. همانطوریکه مشاهده می‌گردد، در تابع مفصل فرانك نمونه‌های مشاهداتی همپوشانی بیشتری نسبت به دیگر توابع مفصل با نمونه‌های شبیه‌سازی شده دارند. بر اساس



شکل ۶- نمودار PDF، CDF، P-P و Q-Q توزیع حاشیه‌ای مناسب متغیرهای بزرگی و درصد مساحت تحت پوشش خشکسالی  
Figure 6- PDF, CDF, P-P and Q-Q plots of appropriate marginal distributions of drought severity and percent under drought

جدول ۴- پارامتر توابع مفصل و معیارهای مختلف انتخاب تابع مفصل  
Table 4- Copula parameters and evaluation criteria of copula functions

	تابع مفصل						
	کلاتون Clayton	گامبل Gumbel	فرانك Frank	جو Joe	گالامبوس Galambos	پلاكت Plackett	نرمال Normal
Parameter	1.731	1.155	8.458	1.074	0.189	15.318	0.509
Log-likelihood	131.67	25.89	<b>235.04</b>	9.37	18.65	211.11	123.09
AIC	-261.34	-49.79	<b>-468.09</b>	-16.75	-35.31	-420.23	-244.19
BIC	-257.20	-45.65	<b>-463.95</b>	-12.60	-31.16	-416.09	-240.05
RMSE	0.132	0.183	<b>0.109</b>	0.198	0.201	0.119	0.151

تابع توام مفصل و توزیع‌های شرطی متغیرهای خشکسالی استخراج می‌شود. برای یک دوره بازگشت مشخص  $T_{S|A}(s|a)$ ، بزرگی خشکسالی مربوط به درصد مساحت تحت تاثیر خشکسالی را می‌توان با حل عددی معادله (۸)، که در آن مقدار  $\alpha$  در این مطالعه برابر با  $1/11$  محاسبه شده است، تعیین کرد. مقدار عبارت  $C_{S|A=a}$  برای تابع

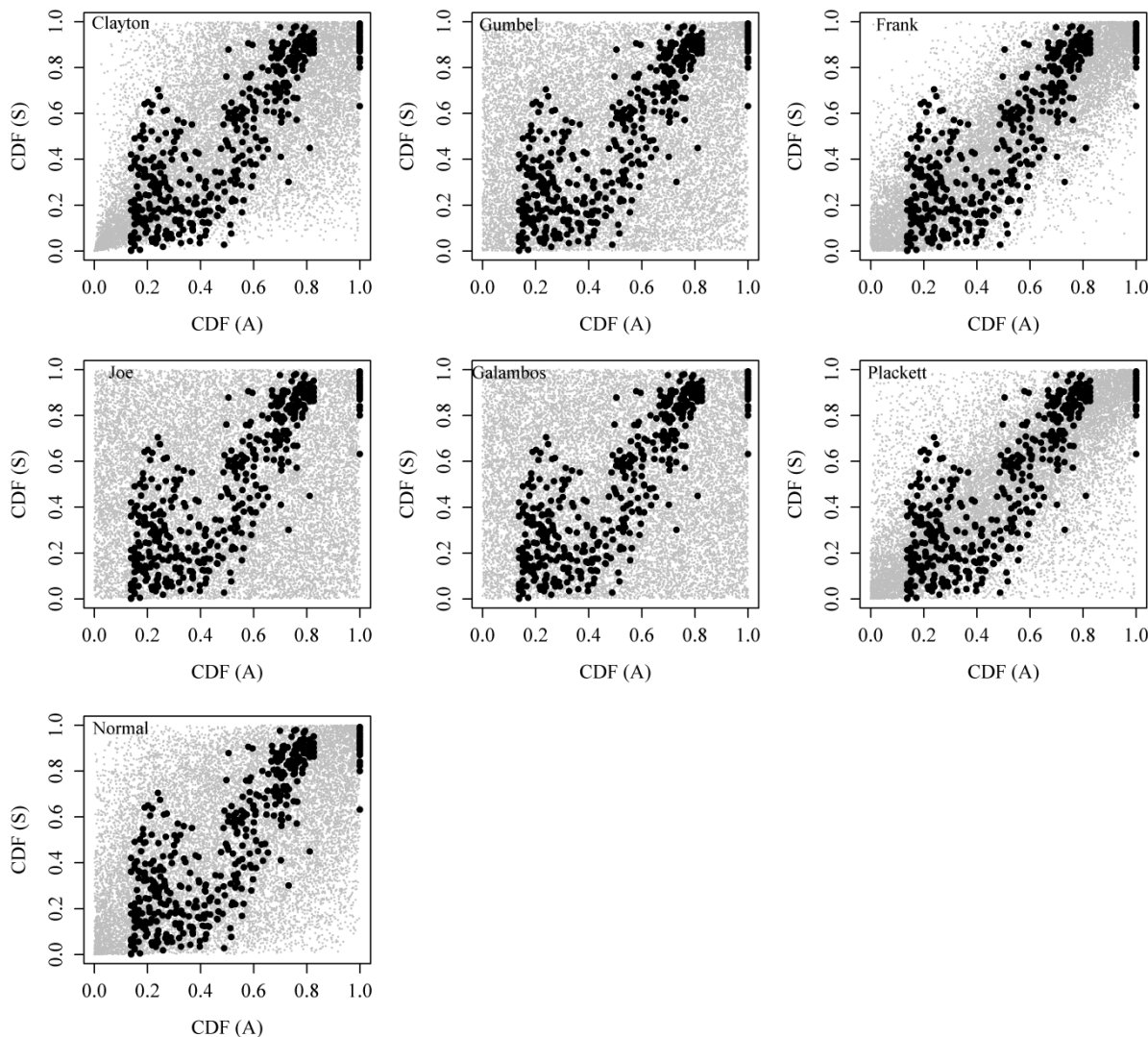
### روابط بزرگی - مساحت - فراوانی خشکسالی

منحنی بزرگی - مساحت - فراوانی خشکسالی (S-A-F) ارتباط بین تغییرات مکانی بزرگی خشکسالی و درصد پوشش خشکسالی را بازای یک دوره بازگشت ارائه می‌دهد. به عبارت دیگر، منحنی S-A-F شامل اطلاعاتی در مورد فراوانی درصد مساحتی که تحت تاثیر یک بزرگی مشخص خشکسالی قرار دارد، می‌باشد. این منحنی بر اساس

$$C_{S|A=a} = - \frac{e^{\theta} (e^{\theta v} - 1)}{(e^{\theta v} - e^{\theta}) e^{\theta u} - e^{\theta v + \theta} + e^{\theta}} \quad (10)$$

که در آن،  $v=F_S(s)$ ،  $u=F_A(a)$ ، پارامتر تابع مفصل فرانک می‌باشد.

مفصل برتر یعنی تابع مفصل فرانک بصورت رابطه (۱۰) (مشتق‌گیری تابع مفصل فرانک نسبت به متغیر درصد مساحت تحت پوشش خشکسالی بازای رابطه (۹)) تعیین می‌شود:



شکل ۷- نمودار پراکندگی تابع توزیع تجمعی نمونه‌های شبیه‌سازی و مشاهداتی S و A، بازای توابع مفصل مختلف

Figure 7- Scatterplots of generated and observed cumulative distribution functions of S and A, based on different copula

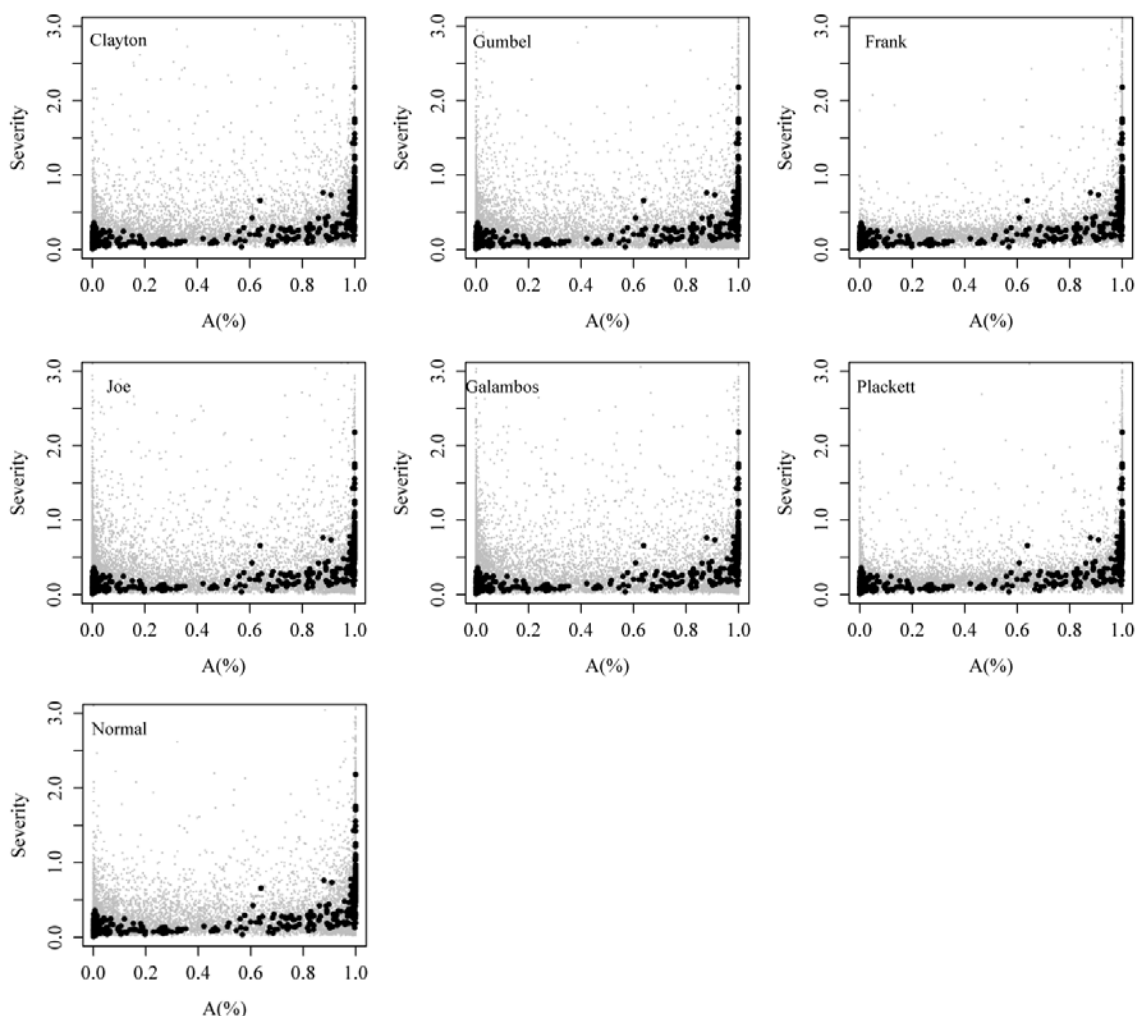
۳۷/۰ بوده و مقدار بزرگی خشکسالی بازای دوره بازگشت ۱۰۰ ساله و ۸۰ درصد مساحت تحت پوشش خشکسالی در منطقه برابر با ۱/۰۵ می‌باشد. بعبارت دیگر، بازای دوره بازگشت ۱۰۰ ساله و بزرگی خشکسالی برابر ۱/۰۵، حدود ۸۰ درصد منطقه مطالعاتی تحت تاثیر خشکسالی قرار خواهد گرفت. همچنین بزرگی خشکسالی برای زمان برگشت ۵۰ ساله با کمترین و بیشترین مقادیر در منطقه یعنی ۰/۴۲ و ۱/۰ بترتیب حدود ۵ و ۹۵ درصد مساحت محدوده مطالعاتی را پوشش می‌دهد. نتایج مطالعه موردی حسینی صفا و مرید (۱۳۸۷) در

منحنی S-A-F برای محدوده مطالعاتی حوضه آبریز دریاچه ارومیه بازای دوره‌های بازگشت مختلف در شکل (۹) نشان داده شده است. مشاهده می‌گردد که با افزایش بزرگی خشکسالی در منطقه، مساحت بیشتری تحت تاثیر خشکسالی قرار می‌گیرد. بر اساس منحنی S-A-F، امکان تعیین بزرگی خشکسالی بازای درصد مساحت تحت پوشش خشکسالی و دوره بازگشت مشخص، وجود دارد. به عنوان مثال، مقدار بزرگی خشکسالی بازای دوره بازگشت ۲۰ ساله و ۲۰ درصد مساحت تحت پوشش خشکسالی در منطقه برابر با

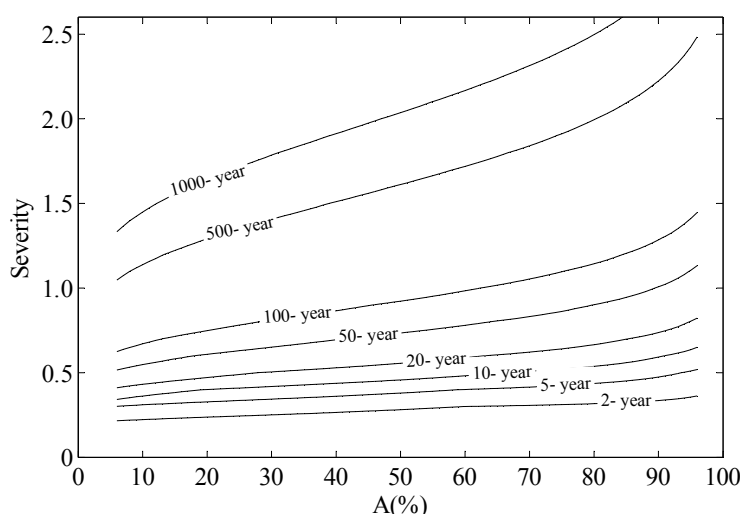
### نتیجه‌گیری کلی

تعیین مشخصه‌های احتمالاتی منطقه‌ای خشکسالی، یکی از گام‌های مهم در برنامه‌ریزی منابع آب می‌باشد. در این مطالعه مشخصه‌های خشکسالی حوضه آبریز دریاچه ارومیه از قبیل بزرگی و درصد مساحت تحت پوشش خشکسالی بازای شاخص خشکسالی SPI در مقیاس زمانی یک‌ماهه و مقیاس مکانی ۲۰۰۰×۲۰۰۰ متر با استفاده از توابع مفصل مدل‌سازی گردید. بدین منظور، بازای توزیع‌های حاشیه‌ای برتر یعنی لاگ‌نرمال دوپارامتری و بتا، به عنوان توزیع‌های حاشیه‌ای برازش یافته به مشخصه‌های بزرگی و درصد مساحت تحت پوشش خشکسالی، ۷ خانواده مختلف از توابع مفصل شامل تابع مفصل کلایتون، گامبل، فرانک، جو، گالامبوس، پلاکت و نرمال برای متغیرهای خشکسالی برازش داده شد.

استان تهران (منحنی S-A-F خشکسالی) بیانگر وجود تغییرات یکسان بزرگی خشکسالی بازای مساحت ثابت و افزایش دوره بازگشت خشکسالی می‌باشد. بعبارت دیگر، تغییرات بزرگی خشکسالی مستقل از مساحت بوده و این رفتار در تمام مساحت‌ها مشابه می‌باشد. این امر به دلیل عدم در نظر گرفتن همبستگی دو متغیر بزرگی و مساحت تحت پوشش خشکسالی در مطالعه بوده است. در حالیکه نتایج این مطالعه نشان می‌دهد که بازای درصد مساحت تحت پوشش خشکسالی ثابت، تغییرات بزرگی خشکسالی با افزایش دوره بازگشت خشکسالی یکسان نبوده و این تغییرات دارای روند افزایشی است.



شکل ۸- نمودار پراکنندگی نمونه‌های شبیه‌سازی و مشاهداتی S و A، بازای توابع مفصل مختلف  
Figure 8- Scatterplots of generated and observed S and A, based on different copula



شکل ۹- منحنی S-A-F بازای دوره‌های بازگشت مختلف در حوضه آبریز دریاچه ارومیه  
Figure 9- S-A-F curve based on different return periods in Lake Urmia basin

بیشتری از حوضه آبریز را در بر می‌گیرند. بطوریکه بعنوان مثال، بزرگی خشکسالی بازای زمان برگشت ۵۰ ساله با کمترین و بیشترین مقادیر در منطقه یعنی ۰/۴۲ و ۱/۰ بترتیب حدود ۵ و ۹۵ درصد مساحت محدوده مطالعاتی را پوشش می‌دهد. استخراج چنین منحنی‌هایی به مدیران سیستم‌های منابع آب بیان می‌کند که بازای دوره‌های بازگشت مختلف، بزرگی خشکسالی چه مقدار خواهد بود و این خشکسالی چه درصدی از مساحت منطقه را تحت تاثیر قرار می‌دهد، که از اولویت‌های بالایی در پایش خشکسالی و ارزیابی ریسک آن در گستره‌های بزرگتر برخوردار می‌باشد.

بر اساس آزمون‌های آماری و گرافیکی نکویی برازش، تابع مفصل فرانک به عنوان مناسب‌ترین تابع مفصل برای مدل‌سازی بزرگی و درصد مساحت تحت پوشش خشکسالی انتخاب گردید. در نهایت بازای تابع مفصل برتر (مفصل فرانک) و توزیع‌های شرطی، روابط بین بزرگی و درصد مساحت تحت پوشش خشکسالی تحت عنوان منحنی بزرگی - مساحت - فراوانی استخراج گردید. نتایج مطالعه نشان می‌دهد که رفتارهای کرانه‌ای اقلیمی (خشکسالی یا ترسالی) اکثریت محدوده مطالعاتی را تحت تاثیر قرار می‌دهند. درحالی‌که رفتارهای نیمه یا شبه خشک دارای پوشش مساحت متفاوت با پراکندگی قابل توجه در محدوده مطالعاتی بوده و با افزایش بزرگی خشکسالی، مساحت

## منابع

- 1- Abdul Rauf U., and Zeepongsekul P. 2014. Copula based analysis of rainfall severity and duration: a case study. *Theoretical and Applied Climatology*, 115(1):153-166.
- 2- Alemaw B.F., and Kileshye-Onema J.M. 2014. Evaluation of drought regimes and impacts in the Limpopo basin. *Hydrology and Earth System Sciences Discussion*, 11:199-222.
- 3- Bonaccorso B., Peres D.J., Castano A., and Cancelliere A. 2015. SPI-based probabilistic analysis of drought areal extent in Sicily. *Water Resources Management*, 29:459-470.
- 4- Chen L., Singh V.P., Guo S., Mishra A.K., and Guo J. 2013. Drought analysis using copulas. *Journal of Hydrologic Engineering*, 18(7):797-808.
- 5- Fisher N.I., and Switzer P. 1985. Chi-plots for assessing dependence. *Biometrika*, 72:253-265.
- 6- Genest C., and Favre A.C. 2007. Everything you always wanted to know about copula modeling but were afraid to ask. *Journal of Hydrologic Engineering*, 12(4):347-368.
- 7- Genest C., Ghoudi K., and Rivest L. 1995. A semi-parametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions. *Biometrika*, 82:543-552.
- 8- Genest C., and Rivest L.P. 1993. Statistical inference procedures for bivariate archimedean copulas. *Journal of the American Statistical Association*, 88(423):1034-1043.
- 9- Genest C., and Boies J.C. 2003. Detecting dependence with Kendall plots. *American Statistician*, 57:275-284.
- 10- Ghorbani Aghdam M., Dinpazhuh Y., Fakheri Fard A., and Darbandi S. 2012. Regionalization of Urmia lake basin from the view of drought using factor analysis. *Journal of Water and Soil*, 26(5):1268-1276. (in Persian with English abstract)

- 11- Griffiths D.V., and Fenton G.A. 2007. Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering. SpringerWien, New York.
- 12- Hisdal H., and Tallaksen L.M. 2003. Estimation of regional meteorological and hydrological drought characteristics: a case study for Denmark. *Journal of Hydrology*, 281(3):230-247.
- 13- Hisdal H., Stahl K., Tallaksen L.M., and Demuth S. 2001. Have streamflow droughts in Europe become more severe or frequent?. *International Journal of Climatology*, 21:317-333.
- 14- Hosseini Safa H., and Morid S. 2008. Probabilistic analysis of spatial-temporal characteristics of droughts severity in Tehran province. *Journal of Agricultural Science and Natural Resources*, 15(15):1-11. (in Persian)
- 15- Joe H. 1997. *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman and Hall, New York.
- 16- Joe H. and Xu J.J. 1996. The estimation method of inference functions for margins for multivariate models. Technical Report 166, Department of Statistics, University of British Columbia.
- 17- Karmakar S., and Simonovic S.P. 2009. Bivariate flood frequency analysis. Part 2: a copula-based approach with mixed marginal distributions. *Journal of Flood Risk Management*, 2:32-44.
- 18- Khadr M. 2016. Temporal and spatial analysis of meteorological drought characteristics in the upper Blue Nile river region. *Hydrology Research*, DOI: 10.2166/nh.2016.194
- 19- Kim T.W., Valdes J.B., and Aparicio J. 2002. Frequency and spatial characteristics of droughts in the Conchos River basin, Mexico. *Water International*, 27(3):420-430.
- 20- Lee T., Modarres R., and Quarda T.B.M.J. 2013. Data-based analysis of bivariate copula tail dependence for drought duration and severity. *Hydrological Processes*, 27(10):1454-1463.
- 21- Li T., Guo S., Chen L., and Guo J. 2013. Bivariate flood frequency analysis with historical information based on copula. *Journal of Hydrologic Engineering*, 10.1061/(ASCE)HE.1943-5584.0000684, 1018-1030.
- 22- Liu X., Wang S., Zhou Y., Wang F., Yang G., and Liu W. 2016. Spatial analysis of meteorological drought return periods in China using copulas. *Natural Hazards*, 80(1):367-388.
- 23- Loukas A., and Vasiliades L. 2004. Probabilistic analysis of drought spatiotemporal characteristics in Thessaly region, Greece. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 4:719-731.
- 24- McKee T.B., Doesken N.J., and Kleist J. 1993. The relationship of drought frequency and duration on time scales. In *Proceedings of the 8<sup>th</sup> Conference on Applied Climatology (Vol. 17, No. 22, pp. 179-183)*. Boston, MA: American Meteorological Society.
- 25- Mirabbasi R., Fakheri-Fard A., and Dinpashoh Y. 2012. Bivariate drought frequency analysis using the copula method. *Theoretical and Applied Climatology*, 108:191-206.
- 26- Mirabbasi R., Fakheri-Fard A., Dinpashoh Y., and Eslamian S.S. 2013. Longterm drought monitoring of urmia using joint deficit index (JDI). *Water and Soil Science*, 23(4):87-103. (in Persian with English abstract)
- 27- Mirakbari M., and Ganji A. 2012. A bivariate analysis of meteorological drought duration and severity (case study: Kermnashah province). *Iranian Water Research Journal*, 6(11):17-25. (in Persian with English abstract)
- 28- Mishra A.K., and Desai V.R. 2005. Spatial and temporal drought analysis in the Kansabati river basin, India. *International Journal River Basin Management*, 3(1):31-41.
- 29- Mishra A.K., and Singh V.P. 2011. Drought modeling—a review. *Journal of Hydrology*, 403:157-175.
- 30- Montaseri M., and Amirataee B. 2015. Stochastic forecasting of drought probabilities (case study on northwest of Iran). *Journal of Civil and Environmental Engineering*, 45(78):51-63. (in Persian with English abstract)
- 31- Montaseri M., and Amirataee B. 2017. Comprehensive stochastic assessment of meteorological drought indices. *International Journal of Climatology*, 37(2):998-1013.
- 32- Nelsen R.B. 2006. *An Introduction to Copulas*. Springer, New York.
- 33- Obasi G.O.P. 1994. WMO's role in the international decade for natural disaster reduction. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 75(9):1655-1661.
- 34- Peel M.C., Finlayson B.L., and McMahon T.A. 2007. Updated world map of the Köppen-Geiger climate classification. *Hydrology and Earth System Sciences*, 11:1633-1644.
- 35- Reddy M., and Ganguli P. 2012. Application of copulas for derivation of drought severity-duration-frequency curves. *Hydrological Processes*, 26(11):1672-1685.
- 36- Reddy M.J., and Ganguli P. 2013. Spatio-temporal analysis and derivation of copula-based intensity-area-frequency curves for droughts in western Rajasthan (India). *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 27:1975-1989.
- 37- Rossi G., Benedini M., Tsakiris G., and Giakoumakis S. 1992. On regional drought estimation and analysis. *Water Resources Management*, 6:249-277.
- 38- Saghafian B., and Mehdikhani H. 2014. Drought characterization using a new copula-based trivariate approach. *Natural Hazards*, 72:1391-1407.
- 39- Salvadori G., De Michele C., Kottegoda N.T., and Rosso R. 2007. *Extremes in Nature: An Approach Using Copulas*. Springer, Dordrecht.
- 40- Santos J.F., Pulido-Calvo I., and Portela M. 2010. Spatial and temporal variability of droughts in Portugal. *Water Resources Research*, 46:W03503.

- 41- Santos M.A. 1983. Regional droughts: a stochastic characterization, *Journal of Hydrology*, 66:183-211.
- 42- Sen Z. 1980. Regional drought and flood frequency analysis: theoretical consideration. *Journal of Hydrology*, 46:265-279.
- 43- Sen Z. 1998. Probabilistic formulation of spatio-temporal drought pattern, *Theoretical and Applied Climatology*, 61:197-206.
- 44- Shiau J.T. 2006. Fitting drought duration and severity with two dimensional copulas. *Water Resources Management*, 20(5):795-815.
- 45- Shiau J.T., and Modarres R. 2009. Copula-based drought severity duration frequency analysis in Iran. *Meteorological Applications*, 16(4):481-489.
- 46- Shin H.S., and Salas J.D. 2000. Regional drought analysis based on neural networks. *Journal of Hydrologic Engineering*, 5(2):145-155.
- 47- Shumway R.H., and Stoffer D.S. 2011. *Time series analysis and its applications*, Springer, New York.
- 48- Sklar A. 1959. *Functions de répartition á n dimensions et leurs marges*. *Publ Inst Stat Univ Paris* 8:229-231.
- 49- Song S., and Singh V.P. 2010. Frequency analysis of droughts using the Plackett copula and parameter estimation by genetic algorithm. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 24(5):783-805.
- 50- Tallaksen L.M., and Hisdal H. 1997. Regional analysis of extreme streamflow drought duration and deficit volume, In: *FRIEND'97-Regional Hydrology: Concepts and Models for Sustainable Water Resource Management* (ed. by A. Gustard, S. Blazkova, M. Brilly, S. Demuth, J. Dixon, H. van Lanen, C. Llasat, S. Mkhandi & E. Servat), 141-150. IAHS Publ. no. 246.
- 51- Tase N. 1976. *Area-Deficit-Intensity characteristics of droughts*, Hydrology Papers, 87, Colorado State University, Fort Collins, USA.
- 52- Vogt J.V., and Somma F. 2000. *Drought and Drought Mitigation in Europe*, Kluwer Academic Publishers, the Netherlands.
- 53- WMO Report, 2006. *Drought monitoring and early warning: concepts, progress and future challenges*. WMO report no. 1006, World Meteorological Organization.
- 54- Yusof F., Hui-Mean F., Suhaila J., and Yusof Z. 2013. Characterisation of drought properties with bivariate copula analysis. *Water Resources Management*, 27(12):4183-4207.
- 55- Zhang L., and Singh V.P. 2007. Bivariate rainfall frequency distributions using Archimedean copulas. *Journal of Hydrology*, 332(1-2):93-109.
- 56- Zhang L., and Singh V.P. 2012. Bivariate rainfall and runoff analysis using entropy and copula theories. *Entropy*, 14(9):1784-1812.



## Copula-Based Regional Drought Analysis and Derivation of Severity-Area-Frequency Curve in Lake Urmia Basin

M. Montaseri<sup>1\*</sup> - B. Amirataee<sup>2</sup> - H. Rezaei<sup>3</sup>

Received: 13-12-2016

Accepted: 20-06-2017

**Introduction:** Drought is a natural phenomenon and was described when precipitation is less than expected. Since the precipitation amounts in terms of spatial and temporal characteristics are different from one region to another, so this phenomenon is known as a multivariate phenomenon. This phenomenon often characterized by different variables such as drought duration, severity, intensity and spatial extent. Although site specific analysis can provide useful information on drought occurrences in a limited area, but these results have a fundamental uncertainty to drought risk assessment in a large region. Therefore regional drought analysis, provides a more comprehensive assessment in each region, and is essential for short and long term management of water resources. Meanwhile, the copula functions has been developed as a new advanced technique for modeling the two or multivariate joint probability distribution in different fields such as financial, hydrology, water resources and risk management. So, in this research, regional analysis of drought severity and percent of drought area were performed using the copula functions in Lake Urmia basin, as one of the Iran's drought-prone basin. Such study with emphasis on bivariate analysis of drought severity and drought areal extend were conducted for the first time in the study area. The main objectives of this study are: 1) Modeling drought characteristics in Lake Urmia basin, 2) Evaluation of copula functions in modeling the structure of the region's drought characteristics, and 3) Develop the Severity-Area-Frequency curve using the appropriate copula.

**Materials and Methods:** Copula is the stochastic model and based on probability. In other words, copulas are function for modeling the two or multivariate random variables. Copulas can be easily coupled the marginal distributions to multiple distributions. There are many parametric copula families available, that seven copula functions such as archimedean (Clayton, Frank, Gumbel and Joe), extreme value (Galambos), elliptical (Normal) and others (Plackett) were used. The SPI-1 was determined at each station and then, the whole area was divided into small grids with cell size of 2000×2000. Distances between the grid centers with all the selected stations were calculated with a programming code. Finally, the SPI values in each grid were calculated using IDW method. The severity and percentage of drought area variables were determined and used for regional drought modeling in the study area based on drought threshold equal to zero. After determining the best statistical distribution of two variables, the appropriate copula function was conducted based on different goodness of fit tests. Finally, the Severity-Area-Frequency curve for the study area was developed based on the appropriate copula function and conditional return periods.

**Results and Discussion:** The correlation between the two variables of percentage of drought area and severity was assessed using different graphical (Kendall plot and Chi plot) and statistical tests (Spearman rank order correlation and Kendall tau). The results showed a positive correlation between the drought severity and percentage of drought area variables. Based on Akaike Information Criterion (AIC) and Bayesian Information Criterion (BIC) and graphical test, the Lognormal and Beta probability distributions were select as a best fit distribution of severity and percentage of area under drought, respectively. Finally, the Frank copula among other type of copulas was selected as an appropriate copula for modeling joint drought severity and percentage of area under drought for the study area based on Maximum log likelihood, AIC, BIC and RMSE criteria. The S-A-F curve was developed using conditional return periods based on Frank copula. According to S-A-F curve, it can be seen that increase in the percentage of area under drought in the study area led to increase in drought severity and vice versa. For example, drought severity with return period of 20 years and drought with 20 percent areal extend is obtained equal to 0.37.

**Conclusions:** Copula functions are of great importance in the analysis of drought, due to preserve correlation between variables and not have any limitation to have a same marginal distribution in long-term prediction of drought events. In this study, using best fit copula (Frank copula) and conditional return periods, the relationships between drought severity and percent of area under drought for the study area named S-A-F curve

1, 2 and 3- Professor, PhD Candidate and Associate Professor, Department of Water Engineering, Urmia University, Urmia

(\* - Corresponding Author Email: montaseri@hotmail.com)

were developed. These curves can be useful for planning and management of drought in the region. Drought risk assessment based on the results of this study can be high priorities for drought monitoring in large areas.

**Keywords:** Area under drought, Marginal distribution, Severity, SPI