

## ارزیابی و مقایسه دو مدل گری GM(1,1) و اسکگز در برآورد توزیع اندازه ذرات خاک‌های

### دشت شهرکرد

حبیب‌اله بیگی هرچگانی<sup>\*۱</sup> - یاسر استواری<sup>۲</sup>

تاریخ دریافت: ۱۳۸۹/۱۰/۷

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۱/۸/۱۴

### چکیده

توزیع اندازه ذرات (PSD) یکی از مهمترین ویژگی‌های فیزیکی خاک است. مدل گری GM(1,1) روشی جدید و متفاوت از روش‌های تجربی و پارامتریک برای توصیف و پیش‌بینی توزیع اندازه ذرات خاک است. در این تحقیق برآورد توزیع اندازه ذرات خاک توسط دو مدل گری و اسکگز در پنج کلاس بافتی شامل ۱۳۸ نمونه در خاک‌های دشت شهرکرد مورد مقایسه قرار گرفته است. برای ارزیابی و مقایسه دو مدل از چهار شاخص آماری (MSE، MAPE، AAE، R<sup>2</sup>) و خطوط ۱:۱ استفاده شد. نتایج نشان داد هر دو مدل اسکگز و گری در هر پنج کلاس بافتی به‌خوبی توزیع اندازه ذرات خاک را برآورد می‌کنند. در عین حال برآورد مدل اسکگز در بافت لومی (سبک‌ترین بافت در این مطالعه) و برآورد مدل گری در بافت رسی (سنگین‌ترین بافت در این مطالعه) کمترین خطا را داشت. به نظر می‌رسد با سبک‌تر شدن بافت برآورد مدل اسکگز و با سنگین‌ترین شدن بافت برآورد مدل گری بهبود یافت. همچنین در برخی کلاس‌های بافتی مقدار خطای مدل اسکگز با افزایش ضریب یکنواختی و ضریب انحناء تمایل به کاهش و خطای ناشی از مدل گری تمایل اندکی به افزایش دارد.

**واژه‌های کلیدی:** مدل گری، مدل اسکگز، دشت شهرکرد، توزیع اندازه ذرات

### مقدمه

لوگ‌نرمال بر مجموعه داده‌های آزمایشی پرداختند و نتیجه گرفتند که هر پنج مدل بیش از ۹۰ درصد تغییرات PSD خاک‌های مورد آزمایش را توصیف می‌کند.

هوانگ و همکاران (۹) هفت مدل پارامتریک توزیع اندازه ذرات خاک شامل: پنج مدل لوگ‌نرمال و مدل‌های گمپرتز و مدل فردلاندر را مورد مقایسه قرار دادند. این محققین دریافتند این مدل‌ها برازش خوبی بر داده‌های توزیع اندازه ذرات دارند. پنج مدل لوگ‌نرمال قبلاً توسط بوچان و همکاران (۶) مورد مطالعه قرار گرفته بودند. این مدل‌ها شامل ۱ تا ۴ پارامتر بودند. این محققین نتیجه گرفتند مدل‌های با تعداد پارامتر بیشتر کارایی بهتری در توصیف توزیع اندازه ذرات دارند. اگر چه نبی‌زاده (۳) نشان داد همیشه این‌طور نیست.

محققان به دنبال مدل‌هایی با کارایی و دقت بیشتر هستند. گاهی داده‌ها محدود به اندازه‌های شن، سیلت و رس هستند. اسکگز و همکاران (۱۳) روشی را برای تخمین توزیع اندازه ذرات پیشنهاد کردند. در این روش داده‌های مورد استفاده تنها محدود به سه اندازه می‌شد. این روش فرض می‌کند که توزیع اندازه ذرات از یک شکل سیگموئیدی پیروی می‌کند. سه جفت نقطه از این توزیع که به خوبی از هم فاصله داشته باشند مانند نقاط مربوط به رس، سیلت و شن انتخاب و براساس آن‌ها تخمین صورت می‌گیرد. این مدل در برخی

توزیع اندازه ذرات (PSD) یکی از مهمترین ویژگی‌های فیزیکی خاک است. از آنجا که اندازه‌گیری توزیع اندازه ذرات نسبتاً سریع و آسان است به طور گسترده از آن به عنوان مبنایی برای تعیین و یا برآورد سایر ویژگی‌های فیزیکی خاک مانند هدایت هیدرولیکی اشباع و غیر اشباع و منحنی مشخصه رطوبتی استفاده می‌شود (۴).

روش مرسوم در تعیین اندازه ذرات اندازه‌گیری ذرات در سه بخش رس، سیلت و شن و استفاده از این بخش‌ها در مثلث بافت خاک برای تعیین کلاس بافتی خاک است. توصیف کامل‌تر توزیع اندازه ذرات خاک با در نظر گرفتن بخش‌های بیشتر و با استفاده از یک مدل ریاضی امکان‌پذیر است. توزیع اندازه ذرات معمولاً با توزیع تجمعی ذرات گزارش می‌شود. بوچان (۵) دریافت که در حدود نیمی از مثلث بافت خاک را می‌توان به وسیله یک PSD لوگ‌نرمال توصیف کرد ولی اگر توزیع تجمعی ذرات پیچیده‌تر باشد به مدل‌هایی با ضرایب بیشتر نیاز است. بوچان و همکاران (۶) به مقایسه پنج مدل مختلف

۱ و ۲- استادیار و دانشجوی دکتری گروه علوم خاک، دانشکده کشاورزی، دانشگاه شهرکرد

(Email: beigi.habib@gmail.com)

(\*- نویسنده مسئول)

داده‌های تاریخی کم از مدل گری استفاده کردند. کاربرد مدل گری در علوم خاک محدود بوده است. اخیراً وو و همکاران (۱۵) برای اولین بار کاربرد مدل گری را در فیزیک خاک (توزیع اندازه ذرات) ارزیابی کردند. لیکن به غیر از این کار منبع دیگری در این مورد یافت نمی‌شود. این محققین مدل گری را در ۲۲۲ نمونه خاک از خاک‌های تایوان مورد ارزیابی قرار دادند و دریافته‌اند مدل گری به خوبی توزیع تجمعی خاک‌های مذکور را به ویژه در بافت‌های سنگین برآورد می‌کند. در این مطالعه مقدار خطا با افزایش ضریب یکنواختی تنها در دو کلاس بافتی شنی لومی (LS) و لوم شنی (SL) کاهش یافت ولی ارتباط قابل توجهی بین خطا با ضرایب یکنواختی و انحنا در کلاس‌های دیگر مشاهده نشد. تاکنون کارایی مدل گری و مدل اسکگرز در خاک‌های ایران، خاک‌های مناطق نیمه خشک و در همه‌ی کلاس‌های بافتی مورد بررسی قرار نگرفته است. هدف از این پژوهش ارزیابی کارایی مدل گری در توصیف و تخمین توزیع اندازه ذرات در خاک‌های دشت شهرکرد و مقایسه آن با کارایی مدل اسکگرز با استفاده از چهار آماره است. همچنین کارایی این دو مدل در ارتباط با برخی شاخص‌های توزیع اندازه ذرات (ضریب یکنواختی و ضریب انحنا) بررسی خواهد شد.

### مواد و روش‌ها

دشت شهرکرد در استان چهارمحال و بختیاری و بین  $7^{\circ} 33'$  تا  $35^{\circ}$  عرض شمالی و  $50^{\circ} 38'$  تا  $51^{\circ} 10'$  طول شرقی و با امتداد شمال غربی - جنوب شرقی واقع شده است. رژیم رطوبتی و حرارتی خاک‌ها به ترتیب، زریک و مزیک است. ابتدا از ۱۳۸ نقطه پراکنده در دشت نمونه‌برداری صورت گرفت. جرم مخصوص حقیقی به روش پیکنومتری تعیین شد. تعیین توزیع اندازه ذرات خاک (اجرای کوچکتر از ۲ میلی‌متر) به روش هیدرومتری (۷ و ۱۲) توسط هیدرومتر مدل H 152 انجام گرفت. ابتدا نمونه‌ها، با کالگون ۵ درصد و همزن الکتریکی تیمار شدند و در استوانه‌های استاندارد ریخته شده و در زمان‌های ۰/۶۷، ۱، ۲، ۴، ۸، ۱۵، ۳۰، ۶۰، ۱۲۰، ۲۴۰، ۴۸۰، ۷۲۰ و ۱۴۴۰ دقیقه (یعنی در ۱۳ نقطه منحنی دانه‌بندی) قرائت شدند. سپس قرائت‌ها نسبت به دما و کالگون تصحیح شدند. قطر معادل با استفاده از دما و جرم ویژه حقیقی محاسبه شد. جهت کاهش خطا، قرائت هیدرومتر در زمان‌های ۰/۶۷، ۱ و ۲ دقیقه سه بار تکرار شد و میانگین قرائت‌ها مورد استفاده قرار گرفت. درصد رس و شن برای هر نمونه به ترتیب با استفاده از قرائت‌های ۴۸۰ و ۰/۶۷ دقیقه هیدرومتر محاسبه شد. برای برآورد توزیع اندازه ذرات با استفاده از مدل اسکگرز نیاز به سه جرم تجمعی  $P(r_0)$ ،  $P(r_1)$  و  $P(r_p)$  و اندازه قطرهای متناظر  $r_0$ ،  $r_1$  و  $r_p$  است. در مدل گری تنها نیاز به یک سری با چهار جرم تجمعی  $P(r_i)$ ،  $P(r_{i+1})$ ،  $P(r_{i+2})$  و  $P(r_{i+3})$  است. برای برآورد

کلاس‌های بافتی مانند شنی بهتر و در برخی کلاس‌ها مانند سیلتی بدتر عمل می‌کند. استفاده از این روش آسان بوده و مقدار تخمین زده شده توافق خوبی با داده‌های اندازه گیری شده دارد (۱۳).

روش‌های تجربی بر اساس یک شکل پیش فرض توزیع اندازه ذرات را تخمین می‌زنند. مدل گری  $GM(1,1)$  فارغ از شکل مدل راه دیگری را برای توصیف توزیع اندازه ذرات به کار می‌گیرد. نظریه مدل گری با تکیه بر داده‌های ناکافی به تجزیه، تحلیل سیستم‌ها و پیش‌بینی می‌پردازد (۱۵). در مدل گری تغییرات هر یک از متغیرها محدود به دامنه مشخصی می‌شود. این مدل برای پیش‌بینی بقیه داده‌ها تنها نیاز به تعداد کمی از داده‌های موجود دارد. بنابراین برخلاف مدل‌های آماری مرسوم که متکی بر نمونه‌های بزرگ هستند این مدل از این نقص ذاتی در امان است. مدل گری  $GM(N,H)$  با استفاده از معادلات دیفرانسیل مرتبه  $N$  ام و  $H$  متغیر داده‌های گسسته و تصادفی را پیش‌بینی می‌کند. زمانی که معادله دیفرانسیل مرتبه اول ( $N=1$ ) با یک متغیر ( $H=1$ ) باشد مدل گری (۱۰) به دست می‌آید. مدل گری برای پیش‌بینی توزیع تجمعی ذرات تنها به چهار جرم تجمعی اولیه نیاز دارد پس می‌تواند منجر به صرفه‌جویی در زمان انرژی و منابع شود (۱۵).

پژوهش‌های مختلفی روی مدل اسکگرز صورت گرفته است (۹) و (۱۰). فولادمند و همکاران (۱) برای تخمین منحنی مشخصه خاک بر اساس تخمین منحنی دانه‌بندی از روش اسکگرز و همکاران (۱۳) در هفت نمونه خاک استفاده نمودند. نتایج این تحقیق نشان داد که استفاده از حد انتهایی شعاع ۹۹۹ میکرومتر ذرات خاک برای تخمین منحنی مشخصه آب خاک مناسب‌تر از شعاع حد انتهایی ۱۲۵ میکرومتر می‌باشد. از آنجا که مدل اسکگرز و همکاران (۱۳) برای خاک‌های با مقدار بیشتر از ۷۰ درصد سیلت جواب‌گو نمی‌باشد فولادمند و سپاسخواه (۸) با استفاده از داده‌های اندازه‌گیری شده منحنی دانه‌بندی ۵۰ خاک مختلف از مجموعه داده آنسودا (UNSOData database) ضرایب اصلاحی را برای بهبود تخمین منحنی دانه‌بندی خاک با مقدار کمتر از ۶۰ درصد و بیشتر از ۶۰ درصد سیلت به دست آوردند. نتایج نشان داد که ضرایب اصلاحی تنها برای ذرات کوچکتر از سیلت (شعاع کوچکتر از ۲۰ میکرومتر) برای تخمین توزیع اندازه ذرات مناسب است. فولادمند (۲) در تحقیقی دیگر با استفاده از اطلاعات ۱۹ نمونه خاک مجموعه آنسودا نشان داد که ترکیب روش اسکگرز و همکاران (۱۳) و منحنی دانه‌بندی اصلاح شده برای تخمین منحنی دانه‌بندی مناسب‌تر از سایر روش‌ها است.

مدل گری کاربرد موفقی در زمینه‌های مختلف پژوهشی داشته است. با این حال تحقیقات محدود در علوم آب و خاک هم نشان از توفیق این مدل دارد. مائو و چیروا (۱۱) به منظور بهبود روابط بین مقدار بارش باران و مقدار روان آب و تخمین مقدار روان آب از

و شرایط زیر برقرار است:

$$1 > P(r_p) > P(r_1) > P(r_o) > 0 \quad r_p > r_1 > r_o > 0, \quad (7)$$

برای برآورد توزیع اندازه‌ی ذرات از معادله‌ی ۳ استفاده می‌شود. ضریب‌های  $c, u$  با تعیین جرم‌های تجمعی  $P(r_1), P(r_o)$  و  $P(r_p)$  به دست می‌آید. در معادله‌ی ۴ اگر  $u$  کمتر از صفر شد از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$u = -v^{1-\beta} w^\beta = |v|^{1-\beta} |w|^\beta \quad (8)$$

در مقاله اصلی اسکگز (۱۳) از نظر قطر (یا شعاع) ذرات شن، سیلت و رس استفاده شده است ولی می‌توان اندازه‌های دیگر را به کار برد منوط به این که این سه ذره با فاصله‌ی خوبی از یکدیگر واقع شده باشند.

### معرفی مدل گری GM(1,1)

در اینجا ترجیحاً از یک مثال عددی برای معرفی مدل گری (۱،۱) استفاده می‌شود. برای توصیف ریاضی مدل گری (۱،۱) علاقه‌مندان می‌توانند به منبع ۱۵ مراجعه کنند. روش تخمین GM(1,1) به شرح زیر است: در ابتدا چهار اندازه متوالی قطر ذره و جرم تجمعی متناظر با آن‌ها انتخاب می‌شود. برای مثال، چهار اندازه ذرات از جدول زیر یعنی  $r_{i+3} = 2/0.00 \text{ mm}$ ،  $r_{i+2} = 4/76.0 \text{ mm}$ ،  $r_i = 9/53.0 \text{ mm}$  و  $r_{i+4} = 0/84.0$  به عنوان توالی اصلی اندازه ذرات انتخاب شدند (جدول ۱).

مجموعه اعداد زیر از جرم تجمعی متناظر با قطرهای مذکور تشکیل می‌شود:

$$X'_{(1,4)} = \{P(r_1), P(r_2), P(r_3), P(r_4)\} \quad (9)$$

$$= \{1, 0/959, 0/813, 0/683\}$$

با مدل اسکگز از قطرهای متناظر در زمان‌های  $0/67, 30$  و  $480$  دقیقه و جرم‌های تجمعی متناظر با آن‌ها و برای برآورد با مدل گری از جرم تجمعی در زمان‌های متناظر  $0/67, 1, 2$  و  $4$  دقیقه استفاده شد. تمام محاسبات مربوط به دو مدل در محیط Excel 2007 انجام گرفت. با برآزش مدل فردلاند به توزیع تجمعی ذرات خاک در محیط نرم افزار SoilVision 4 (۱۴)، ضریب یکنواختی و ضریب انحنای نمونه‌ها بر اساس روابط زیر تعیین شدند (۱۵):

$$Cu = \frac{D_{60}}{D_{10}} \quad (1)$$

$$Cc = \frac{D_{30}^2}{D_{10} \times D_{60}} \quad (2)$$

که در آن‌ها  $D_{10}, D_{30}$  و  $D_{60}$  به ترتیب قطر ذرات خاک با توزیع تجمعی ۱۰ و ۳۰ و ۶۰ درصد می‌باشند.

### معرفی مدل اسکگز

اسکگز و همکاران (۱۳) برای توصیف PSD از معادله‌ی تجربی زیر استفاده کردند:

$$P(r) = \left[ 1 + (\sqrt{P(r_o)} - 1) \exp[-uR^c] \right]^{-1} \quad (3)$$

$$R = (r - r_o) / r_o, \quad r \geq r_o \geq 0$$

که در آن  $P(r)$  جرم ذرات خاک با شعاع کمتر از  $r$ ،  $r_o$  مرز پایینی شعاع،  $c$  و  $u$  ضرایب مدل هستند. برای حل معادله، دو ضریب  $c$  و  $u$  به صورت زیر برآورد می‌شود:

$$c = \alpha \cdot \text{Ln}(v/w) \quad u = -v^{1-\beta} w^\beta \quad (4)$$

که در آن‌ها:

$$w = \text{Ln} \left[ \frac{\sqrt{P(r_p)} - 1}{\sqrt{P(r_o)} - 1} \right] \quad v = \text{Ln} \left[ \frac{\sqrt{P(r_1)} - 1}{\sqrt{P(r_o)} - 1} \right], \quad (5)$$

$$\alpha = \frac{1}{\text{Ln}[(r_1 - r_o)/(r_p - r_o)]} \quad \beta = \alpha \cdot \text{Ln} [(r_1 - r_o)/r_o] \quad (6)$$

جدول ۱- مثالی از مدل گری (۱،۱). قطر ذرات (d)؛ جرم تجمعی اندازه گیری شده (Fd)؛ برآورد جرم تجمعی با مدل GM(1,1) بر گرفته از منبع (۱۵)

|                                 |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|---------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| d                               | ۹/۵۳۰ | ۴/۷۶۰ | ۲/۰۰۰ | ۰/۸۴۰ | ۰/۲۵۰ | ۰/۱۴۹ | ۰/۰۷۴ | ۰/۰۳  | ۰/۰۱۴ | ۰/۰۱۱ | ۰/۰۰۸ |
| Fd                              | ۱/۰۰۰ | ۰/۹۵۹ | ۰/۸۱۳ | ۰/۶۸۳ | ۰/۵۲۷ | ۰/۴۴۹ | ۰/۳۱۵ | ۰/۱۶۸ | ۰/۱۲۹ | ۰/۰۸۲ | ۰/۰۵۶ |
| برآورد جرم تجمعی با مدل GM(1,1) |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| F'd                             | ۱/۰۰۰ | ۰/۹۵۹ | ۰/۸۱۳ | ۰/۶۸۳ | ۰/۵۷۷ | ۰/۴۳۶ | ۰/۳۵۳ | ۰/۱۸۳ | ۰/۱۰۰ | ۰/۰۸۱ | ۰/۰۶۲ |

می‌شود:

$$X'_{(۳,۵)} = \{P(r_۲), P(r_۳), P(r_۴), P(r_۵)\} \quad (۱۷)$$

$$= \{۰/۹۵۹, ۰/۸۱۳, ۰/۶۸۳, ۰/۵۷۷\}$$

گام ۱ تا گام ۵ برای این مجموعه‌ی جدید تکرار می‌شود. برآورد جرم تجمعی در هر تکرار در سطر سوم جدول ۱ است.

در این پژوهش، روش اولیه GM(1,1) با مقداری تغییر به کار گرفته شده است: بدین صورت که در هر تکرار، برای برآورد جرم تجمعی ذره بعدی، از جرم تجمعی تمام ذرات قبلی استفاده شد. مثلاً در تکرار دوم برای تخمین جرم تجمعی ششمین ذره از مجموعه‌ی زیر که شامل جرم تجمعی ذرات اول تا پنجم است استفاده شد:

$$X'_{(۱,۵)} = \{P(r_۱), P(r_۲), P(r_۳), P(r_۴), P(r_۵)\} \quad (۱۸)$$

$$= \{۱, ۰/۹۵۹, ۰/۸۱۳, ۰/۶۸۳, ۰/۵۷۷\}$$

همین‌طور برای برآورد هفتمین جرم تجمعی از چهار جرم تجمعی اولیه و دو برآورد پنجم و ششم استفاده شد و این عمل تا تخمین آخرین جرم تجمعی تکرار شد. کارایی دو مدل اسکگرز و گری (۱،۱) برای تمام ۱۳۸ نمونه‌ی خاک به صورت جداگانه انجام شد.

#### مقایسه‌ی کارایی مدل‌ها

چهار آماره‌ی متوسط میانگین مربعات خطا (MSE)، درصد خطای مطلق (MAPE)، خطای مطلق تجمعی (AAE) و ضریب تعیین (R<sup>2</sup>) برای مقایسه مدل‌ها مورد استفاده قرار گرفت. MSE به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[ P(r_k) - \hat{P}(r_k) \right]^2 \quad (۱۹)$$

که در آن  $P(r_k)$  و  $\hat{P}(r_k)$  به ترتیب مقدار اندازه‌گیری شده و مقدار برآورد شده‌ی کسر تجمعی ذرات برای R کلاس (قطر) ذره و n تعداد کل برآوردهاست. مدلی که دارای MSE کوچک‌تر باشد برتر است.

MAPE به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| \frac{P(r_k) - \hat{P}(r_k)}{P(r_k)} \right| \quad (۲۰)$$

مدلی که دارای MAPE کمتر باشد مدل برتر است.

AAE به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$AAE = \left| \sum_{k=1}^n P(r_k) - \hat{P}(r_k) \right| \quad (۲۱)$$

گام ۱. بر اساس  $X'_{(۱,۴)}$ ، و از جمع هر عضو با حاصل جمع عضوهای قبلی، مجموعه اعداد زیر تشکیل می‌شود:

$$X'_{(۱,۴)} = \left\{ 1, 1+۰/۹۵۹, 1+۰/۹۵۹+۰/۸۱۳, \right. \quad (۱۰)$$

$$\left. 1+1+۰/۹۵۹+۰/۸۱۳+۰/۶۸۳ \right\}$$

$$= \{1, ۱/۹۵۹, ۲/۷۷۲, ۳/۴۵۵\}$$

گام ۲. میانگین دو عضو متوالی از مجموعه  $X'_{(۱,۴)}$  اعضای مجموعه‌ی زیر را تشکیل می‌دهند:

$$Z = \left\{ \frac{1+۱/۹۵۹}{۲}, \frac{۱/۹۵۹+۲/۷۷۲}{۲}, \frac{۲/۷۷۲+۳/۴۵۵}{۲} \right\} \quad (۱۱)$$

$$= \{۱/۴۷۹, ۲/۳۶۵۵, ۳/۱۱۳۵\}$$

طبیعی است که این مجموعه یک عضو کمتر از مجموعه‌ی قبلی دارد.

گام ۳. پارامترهای مدل گری a و b با حل معادله‌ی زیر تعیین می‌شود:

$$\begin{bmatrix} P(r_۲) \\ P(r_۳) \\ \vdots \\ P(r_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Z(۲) & ۱ \\ -Z(۳) & ۱ \\ \vdots & \vdots \\ -Z(n) & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (۱۲)$$

که در این مرحله دستگاه معادله‌ی فوق به شکل زیر در می‌آید:

$$\begin{bmatrix} ۰/۹۵۹ \\ ۰/۸۱۳ \\ ۰/۶۸۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱/۴۷۹ & ۱ \\ -۲/۳۶۵۵ & ۱ \\ -۳/۱۱۳۵ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (۱۳)$$

بنابراین:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۱۶۸۷ \\ ۱/۲۰۹۷ \end{bmatrix} \quad (۱۴)$$

گام ۴. معادله‌ی پیش‌بینی جرم تجمعی هر اندازه ذره به شکل زیر است:

$$\hat{P}(r_k) = \left[ P(r_۱) - \frac{b}{a} \right] [1 - \exp(a)] \exp(-ak) \quad (۱۵)$$

پس برای پنجمین جرم تجمعی (یعنی وقتی: k=۵) مقدار برآورد

شده،  $\hat{P}(r_۵)$ ، برابر است با:

$$\hat{P}(r_۵) = \left[ P(r_۱) - \frac{۱/۲۰۹۷}{۰/۱۶۸۷} \right] [1 - \exp(۰/۱۶۸۷)] \exp[-۰/۱۶۸۷(۵)] = ۰/۵۷۷ \quad (۱۶)$$

گام ۵. جرم تجمعی ششمین قطر ذره،  $P(r_۶)$ ، با استفاده از مجموعه جدید زیر یعنی جرم تجمعی ذره‌ی دوم تا پنجم تخمین زده

هر کلاس ضریب یکنواختی (رابطه‌ی ۱) و ضریب انحنا (رابطه‌ی ۲) در نمونه‌های خاک دشت شهرکرد نشان داده شده است.

در این نمونه‌ها ضریب یکنواختی از ۲ تا ۱۱۰۵ و ضریب انحنا از ۰/۱ تا حدود ۱۴ تغییر می‌کند. میانگین آماره‌های کارایی دو مدل اسکگز و گری (۱،۱) برای ۱۳۸ نمونه‌ی خاک دشت شهرکرد در جدول ۳ آورده شده است.

هر دو مدل اسکگز و گری کارایی خوبی در ۵ کلاس بافتی خاک‌های دشت شهرکرد دارند. همچنین نتایج کارایی هر دو مدل با نتایج وو و همکاران (۱۵) همخوانی کلی دارد با این تفاوت که در مطالعه حاضر کارایی مدل اسکگز اندکی بهتر از کارایی مدل گری است. به طور کلی نتایج سه آماره‌ی MSE، AAE و MAPE نشان می‌دهند در چهار کلاس بافتی لوم‌سیلتی (SiL)، لوم‌رسی سیلتی (SiCL)، لوم‌رسی (CL) و لوم (L) کارایی مدل اسکگز اندکی بهتر از مدل گری است و فقط در کلاس بافت رسی (C) کارایی مدل گری اندکی بهتر از مدل اسکگز است (جدول ۳).

هرچه AAE مدل کمتر باشد کارایی مدل بیشتر است.

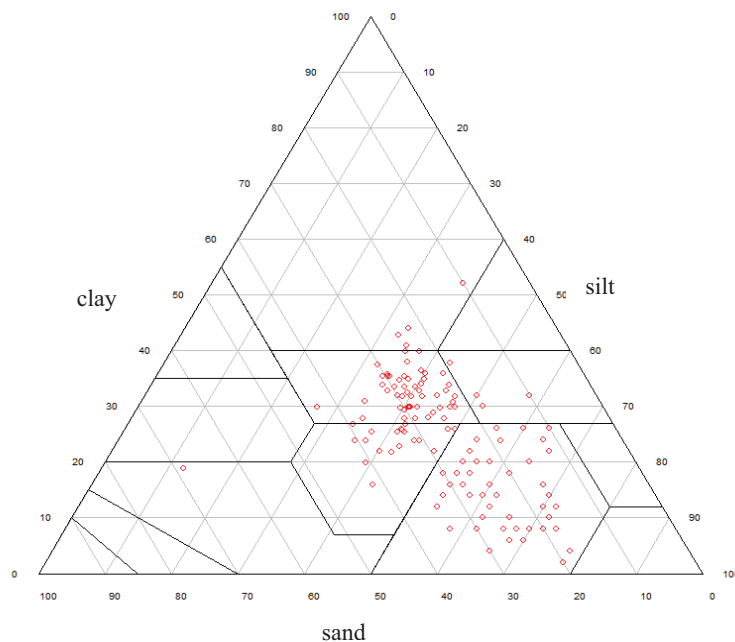
$R^2$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R^2 = \left\{ \frac{n \sum P(r_k) \hat{P}(r_k) - [\sum P(r_k)] [\sum \hat{P}(r_k)]}{\sqrt{n \sum [P(r_k)]^2 - [\sum P(r_k)]^2} \sqrt{n \sum [\hat{P}(r_k)]^2 - [\sum \hat{P}(r_k)]^2}} \right\}^2 \quad (22)$$

$R^2$  به صورت حداقل اختلاف بین دو داده اندازه‌گیری شده و تخمینی شده بیان می‌شود. مدلی که دارای  $R^2$  بزرگ‌تر باشد ترجیح داده می‌شود.

## نتایج و بحث

توزیع کلاس‌های بافت خاک در نمودار مثلثی شکل ۱ دیده می‌شود. همانطور که در شکل ۱ مشاهده می‌شود اکثر نمونه‌ها در کلاس‌های بافتی لوم سیلتی (SiL)، لوم رسی (CL)، لوم رسی سیلتی (SiCL) و لوم (L) و تعداد کمتری از نمونه‌ها نیز در کلاس بافت رسی (C) قرار می‌گیرند. به طور کلی خاک‌های دشت شهرکرد در همین کلاس‌های بافتی قرار می‌گیرند. در جدول ۲ تعداد نمونه‌های



شکل ۱- توزیع کلاس‌های بافتی نمونه خاک‌های دشت شهرکرد

جدول ۲- کلاس‌های بافت خاک، درصد و شاخص‌های دانه‌بندی هر کلاس بافتی در خاک‌های دشت شهرکرد

| کلاس بافتی           | تعداد نمونه | درصد | ضریب یکنواختی | ضریب انحنا |
|----------------------|-------------|------|---------------|------------|
| لوم رسی سیلتی (SiCL) | ۹           | ۶/۵  | ۱۵-۳۶۰        | ۱۳/۶-۰/۸   |
| لوم رسی (CL)         | ۴۹          | ۳۵/۵ | ۳۳-۱۱۰۵       | ۹/۰-۰/۸    |
| لوم سیلتی (SiL)      | ۵۷          | ۴۱/۳ | ۲-۱۴۳         | ۹/۷-۰/۱    |
| لوم (L)              | ۲۰          | ۱۴/۵ | ۶۴-۴۶۴        | ۸/۴-۰/۷    |
| رسی (C)              | ۳           | ۲/۲  | ۱۲۹-۳۸۳       | ۱/۹-۱/۵    |

جدول ۳- مقایسه مدل‌های اسکگز و گری با استفاده میانگین از آماره‌های  $R^2$ ، MAPE، AAE و MSE در خاک‌های دشت شهرکرد. حروف ضخیم‌تر کارایی بالاتر را نشان می‌دهد

| $R^2$ |      | MAPE  |      | AAE   |      | MSE   |       | کلاس بافت            |
|-------|------|-------|------|-------|------|-------|-------|----------------------|
| اسکگز | گری  | اسکگز | گری  | اسکگز | گری  | اسکگز | گری   |                      |
| ۰/۹۹  | ۰/۹۹ | ۰/۱۴  | ۰/۰۸ | ۰/۵۴  | ۰/۳۰ | ۰/۰۰۴ | ۰/۰۰۱ | لوم سیلتی (SiL)      |
| ۰/۹۹  | ۰/۹۹ | ۰/۱۱  | ۰/۰۵ | ۰/۴۰  | ۰/۲۵ | ۰/۰۰۴ | ۰/۰۰۱ | لوم رسی سیلتی (SiCL) |
| ۰/۹۸  | ۰/۹۶ | ۰/۱۴  | ۰/۰۶ | ۰/۶۷  | ۰/۳۲ | ۰/۰۰۵ | ۰/۰۰۱ | لوم رسی (CL)         |
| ۰/۹۹  | ۰/۹۸ | ۰/۲۶  | ۰/۰۵ | ۰/۹۷  | ۰/۲۲ | ۰/۰۱۰ | ۰/۰۰۱ | لوم (L)              |
| ۰/۹۹  | ۰/۹۴ | ۰/۰۴  | ۰/۰۶ | ۰/۲۶  | ۰/۳۷ | ۰/۰۴۰ | ۰/۰۰۲ | رسی (C)              |
| ۰/۹۹  | ۰/۹۷ | ۰/۱۴  | ۰/۰۶ | ۰/۵۶  | ۰/۳۰ | ۰/۰۱۱ | ۰/۰۰۱ | میانگین              |

بافتی آورده شده است. این نمودارها بر اساس میانگین داده‌های اندازه‌گیری شده هر کلاس رسم شده و همراه با آن پیش‌بینی دو مدل اسکگز و گری برای هر کلاس بافتی آمده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود توزیع ذرات در سه کلاس لوم رسی سیلتی (SiCL)، لوم سیلتی (SiL) و لوم (L) توسط مدل اسکگز بهتر از مدل گری تخمین زده شده است و کارایی مدل گری در تخمین کلاس‌های بافتی لوم رسی (CL) و لوم (L) ضعیف‌تر است. عملکرد مدل گری تنها در کلاس بافتی رسی بهتر از مدل اسکگز است. منحنی توزیع اندازه ذرات اسکگز یک منحنی لجستیک است. هنگامی که داده‌های توزیع اندازه ذرات به تابع لجستیک نزدیک‌تر می‌شود (از جمله در بافت‌های سبک) مدل اسکگز توزیع اندازه ذرات را بهتر توصیف می‌کند. مدل گری فرضی در مورد شکل توزیع نمی‌کند و در کلاس‌های بافتی سنگین‌تر نیز قادر است توصیف خوبی از توزیع اندازه ذرات ارائه دهد. و همکاران (۱۵) برتری مدل گری در کلاس‌های بافتی مطالعه شده به غیر از کلاس بافتی شنی را نشان دادند در حالی که نتایج این پژوهش برتری اندک مدل اسکگز نسبت به مدل گری را در چهار کلاس بافتی نشان می‌دهد. یکی از علل احتمالی این اختلاف توزیع اجزای بافت خاک است. نمونه خاک‌های مورد مطالعه وو و همکاران (۱۵) به غیر از سه نمونه همگی بیش از ۴۰ درصد شن و عموماً بیش از ۶۰ درصد شن داشتند و عمدتاً در کلاس بافتی شنی (S)، شن لومی (LS)، لوم شنی (SL) و لوم رسی شنی (SCL) یعنی در گوشه پایینی سمت چپ مثلث بافت خاک قرار داشتند (شکل ۲، مقاله وو و همکاران: ۱۵).

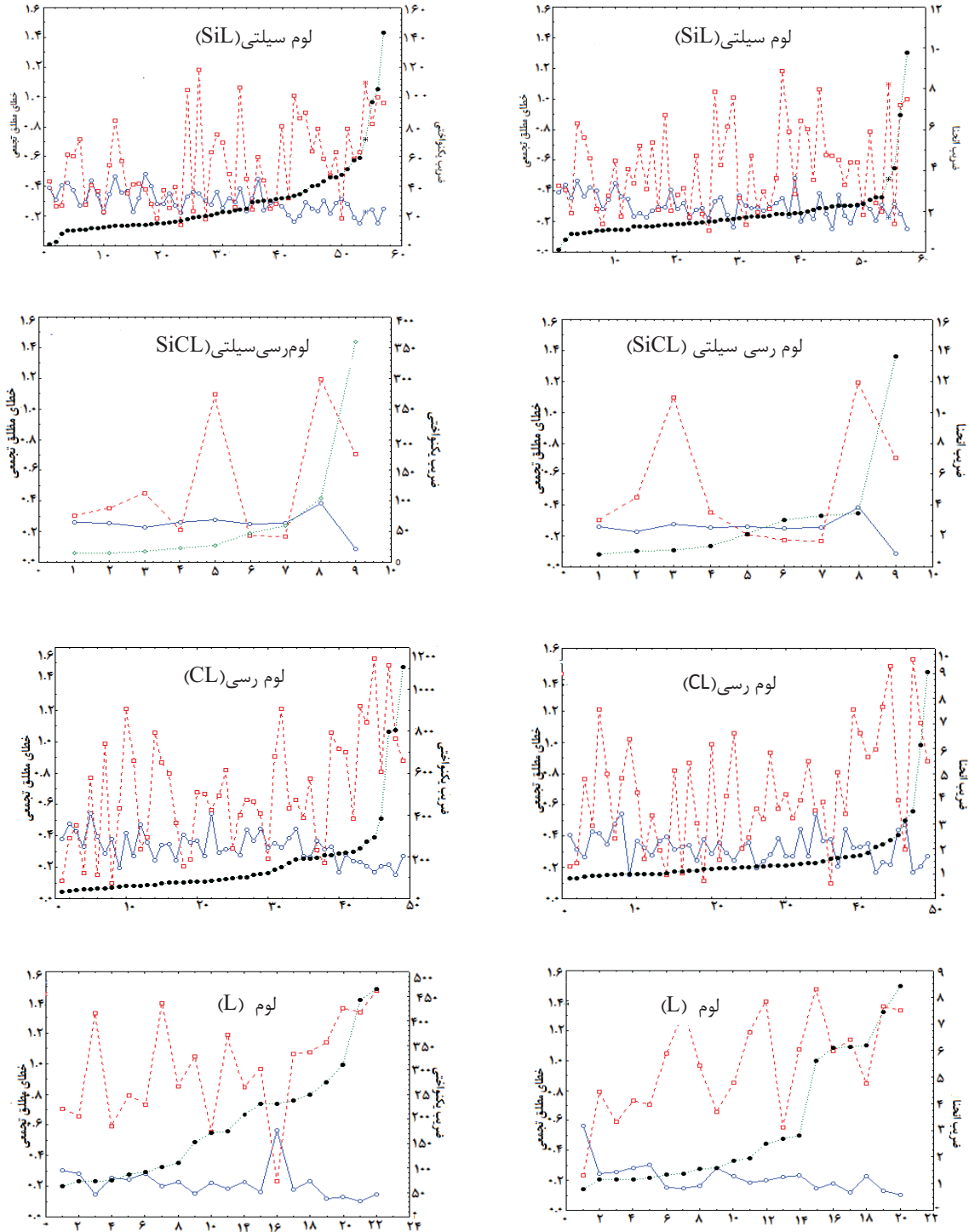
این در حالی است که در مطالعه‌ی حاضر کلاس‌های بافتی در گوشه پایینی سمت راست مثلث بافت قرار داشته (شکل ۱) و تقریباً قریباً مجموعه داده‌های وو و همکاران (۱۵) است. یادآوری می‌شود که در تحقیق وو و همکاران (۱۵) دو کلاس بافتی لوم رسی (CL) و لوم رسی سیلتی (SiCL) وجود نداشتند.

بر اساس  $R^2$  در همه کلاس‌های بافتی مطالعه شده مدل گری برتر از مدل اسکگز است. شکل ۲ تغییرات خطای مطلق تجمعی (AAE) را در برابر ضریب یکنواختی و انحنا برای چهار کلاس بافتی غالب یعنی SiL، SiCL، CL و L نشان می‌دهد.

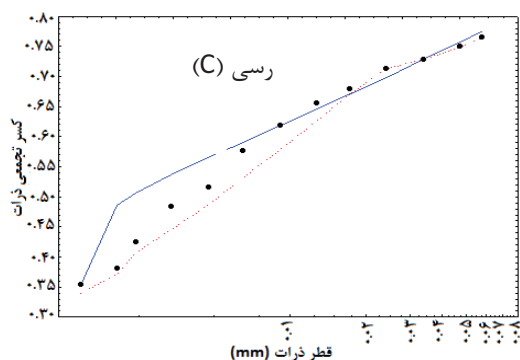
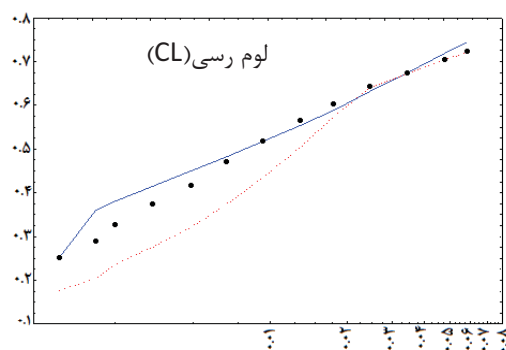
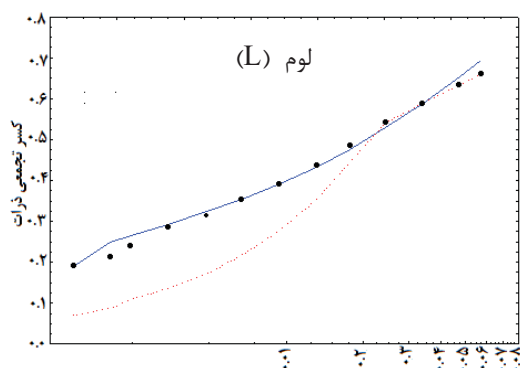
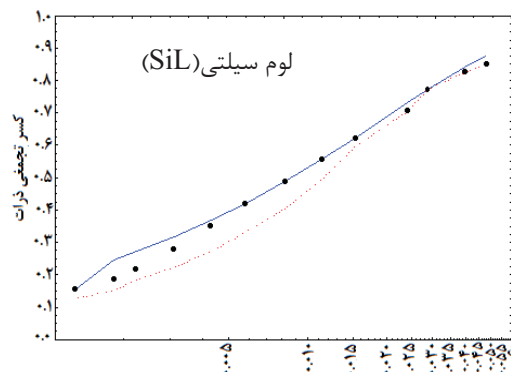
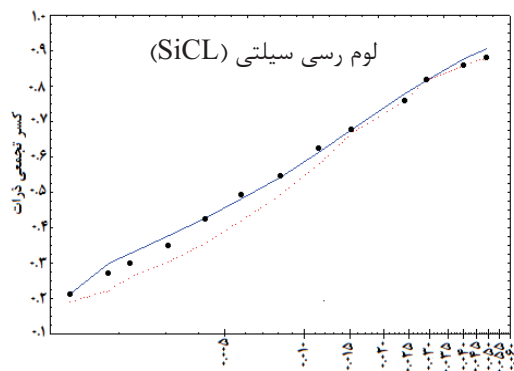
بر اساس این شکل: (الف) در مجموع در هر چهار کلاس بافتی حاصل از مدل اسکگز مقدار AAE کمتر از مقدار AAE حاصل از مدل گری است، (ب) تغییرات AAE در مدل اسکگز کمتر از تغییرات AAE در مدل گری است، و (ج) با افزایش ضریب یکنواختی مقدار AAE حاصل از مدل اسکگز تمایل به کاهش دارد (به غیر از کلاس SiCL) ولی AAE حاصل از مدل گری تمایل ناچیزی به افزایش دارد. وو و همکاران (۱۵) به این نتیجه رسیدند که در کلاس‌های بافتی غیر از کلاس شن AAE مدل گری کمتر از AAE مدل اسکگز است.

عدم ارتباط مشخص AAE با ضرایب یکنواختی و انحنا ممکن است ناشی از سنگینی (ریزی) بیشتر بافت‌ها در مطالعه حاضر باشد. در مطالعه وو و همکاران (۱۵) تنها در دو کلاس بافتی شن لومی (LS) و لوم شنی (SL) با افزایش ضریب یکنواختی خطای مطلق تجمعی (AAE) حاصل از دو مدل کاهش یافت. در مطالعه حاضر عمدتاً خطای مطلق تجمعی (AAE) محاسبه شده از مدل اسکگز با افزایش ضریب یکنواختی و انحنا کاهش می‌یابد ولی این کاهش چندان شدید نیست. از طرف دیگر AAE محاسبه شده بر اساس مدل گری با افزایش ضرایب یکنواختی و انحنا تمایل اندکی به افزایش دارد. در خاک‌های سنگین افزایش ضرایب یکنواختی حاکی از تعادل نسبی ذرات درشت در مقایسه با ذرات ریز تشکیل دهنده‌ی بافت است، این به این معنی است که توزیع تجمعی خاک از حالت سیگموئیدی دورتر و به یک خط راست تمایل پیدا می‌کند و از آنجا که مدل اسکگز بر مبنای سیگموئیدی بودن توزیع ذرات خاک بنا نهاده شده است پس می‌توان گفت در چنین خاک‌هایی کاهش خطای مدل با افزایش ضریب یکنواختی کمتر خواهد بود.

در شکل ۳ نمودارهای توزیع تجمعی ذرات خاک برای پنج کلاس



شکل ۲- رابطه خطای مطلق تجمعی با ضریب انحنا (راست)، ضریب یکنواختی (چپ) و در چهار کلاس بافتی غالب در خاک‌های دشت شهرکرد. نمونه‌ها بر اساس ضریب یکنواختی و ضریب انحنا به صورت صعودی مرتب شده‌اند: ● (ضریب انحنا یا یکنواختی)؛ ○ (مربوط به مدل اسکگرز)، □ (مربوط به مدل گری (۱،۱)).



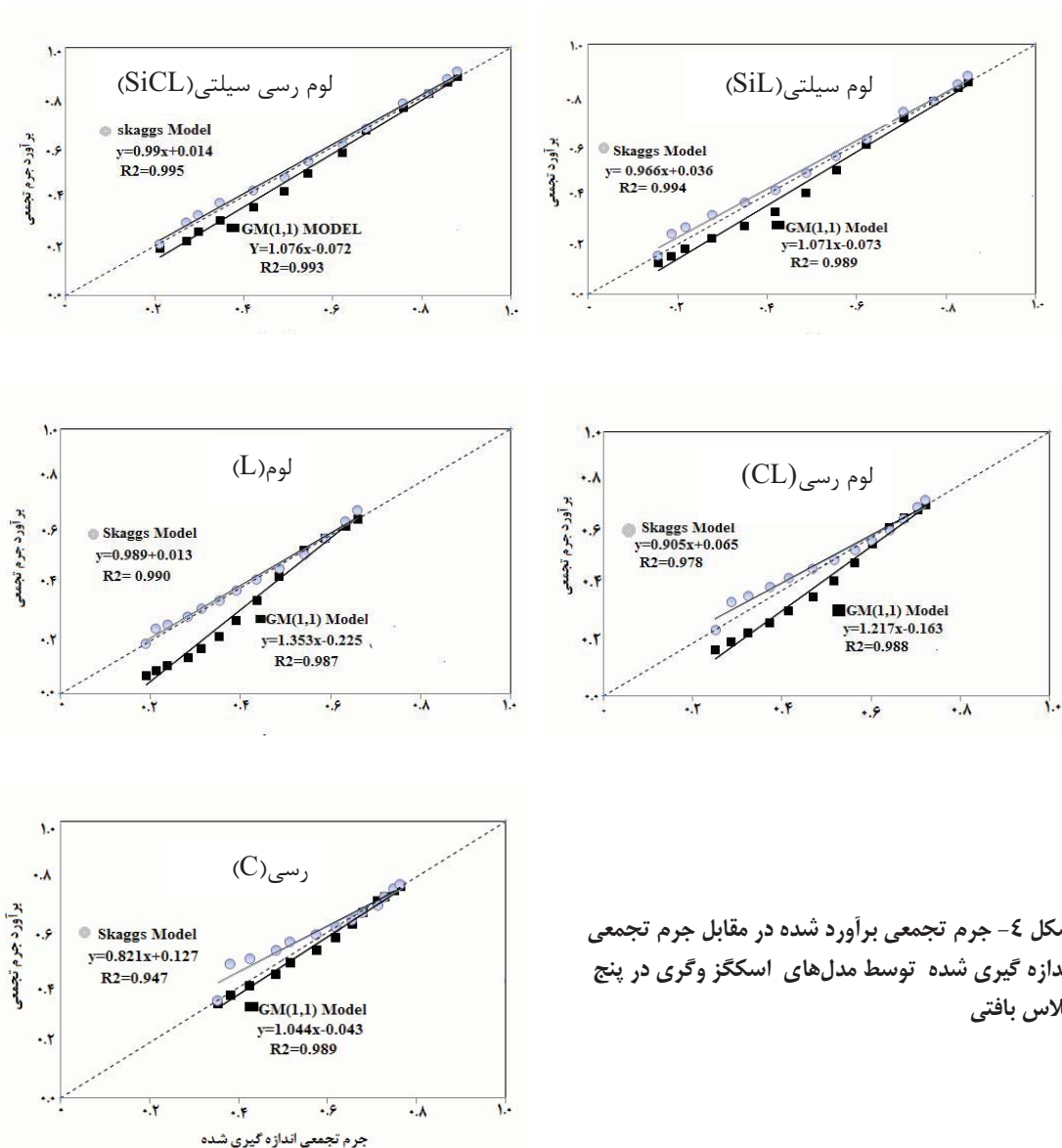
شکل ۳- مقایسه برآورد مدل‌های اسکگز، گری و داده‌های اندازه گیری شده در پنج کلاس بافتی خاک‌های دشت شهرکرد. هر نمودار بر اساس میانگین داده‌های تمام نمونه‌های موجود در هر کلاس بافتی رسم شده است.  
 • (داده‌ها) ، — (مدل اسکگز) ، (مدل گری (۱،۱)).

لوم (L) و لوم رسی (CL) چشمگیرتر و در قطرهای کوچک‌تر بیشتر است، (د) در کلاس‌های بافتی رسی (C)، لوم سیلتی (SiL) و لوم رسی (CL) مدل اسکگز اندکی بیش برآوردی دارد که با ریزتر شدن ذرات به ویژه در کلاس رسی بیشتر می‌شود، (ه) در کلاس بافتی لوم (L) شیب خط رگرسیون مربوط به مدل اسکگز با خط ۱:۱ موازی و منطبق است که حاکی از دقت زیاد آن در این کلاس بافتی است، و (و) شیب خط مربوط به مدل گری در کلاس‌های لوم و لوم رسی به ترتیب ۱/۳۵ و ۱/۲۲ است که تفاوت معنی‌داری با ۱ دارد ( $p < 0.05$ ).

شکل ۴ نمودارهای جرم تجمعی برآورد شده توسط دو مدل اسکگز و گری را همراه با خطوط ۱:۱ نشان می‌دهد. در حالت ایده آل تمام نقاط تخمین زده شده پراکنده روی خط نقطه چین می‌افتند و خط رگرسیون هر مدل بر خط ۱:۱ منطبق و شیب برابر ۱ می‌شود و به این معناست که تمام داده‌های اندازه‌گیری شده و تخمین زده شده مشابه هستند.

بر اساس نمودارهای شکل ۴ مشاهده می‌شود: (الف) در کلاس بافتی رسی (C) خط رگرسیون مربوط به مدل گری به خط ۱:۱ نزدیک‌تر است، (ب) در تمام کلاس‌ها مدل گری مقداری کم برآوردی را نشان می‌دهد، (ج) این کم برآوردی در کلاس‌های بافتی





شکل ۴- جرم تجمعی برآورد شده در مقابل جرم تجمعی اندازه گیری شده توسط مدل های اسکگز و گری در پنج کلاس بافتی

## نتیجه گیری

قبلاً نشان داده شده است که عملکرد مدل اسکگز به بافت بستگی دارد (۱۳ و ۱۵). نتایج فعلی نشان می دهد که عملکرد مدل گری در خاک رسی بهترین بوده و در بافت لوم که سبک ترین بافت در این مطالعه است ضعیف ترین است. با سنگین تر شدن بافت (از L به CL به SiL و SiCL به C) کارایی مدل گری بیشتر می شود (شکل ۴). بنابراین نتایج و بر خلاف یافته وو و همکاران (۱۵) عملکرد مدل گری نوعی بستگی به بافت خاک نشان می دهد.

برای بیشتر مدل های نوع لجستیک (مانند مدل اسکگز) شکل کلی منحنی PSD ثابت و سیگموئیدی است و برآورد با درون یابی و

تحت شکل کلی صورت می گیرد. پس طبیعی است که هر چه توزیع ذرات سیگموئیدی تر باشد (که معمولاً در بافت های سبک و شنی این طور است) برآورد بهتر باشد (۱۳). بایستی توجه داشت که یک مدل تجربی واحد برای توصیف همه ی گستره ی بافت خاک وجود ندارد. در مقابل مدل اسکگز، برآورد مدل گری با برون یابی صورت می گیرد و برای این کار ماتریس ضرایب برای پیش بینی نقطه ی بعدی به طور مستقل تشکیل می شود.

نتایج نشان داد هر دو مدل اسکگز و گری در هر پنج کلاس - بافتی به خوبی توزیع اندازه ذرات خاک را برآورد می کنند. در عین حال برآورد مدل اسکگز در بافت لومی (سبک ترین بافت در این مطالعه) و برآورد مدل گری در بافت رسی (سنگین ترین بافت در این مطالعه)

مدل گری در آن است که با داشتن درصد تجمعی چهار قطر متوالی می‌توان بقیه توزیع را پیش‌بینی نمود. نتایج این مطالعه نشان می‌دهد که می‌توان از مدل گری در برآورد توزیع ذرات استفاده کرد. مطالعه‌ی کارایی مدل گری و مقایسه آن با مدل اسکگز در خاک‌های دشت‌های دیگر استان چهار محال و بختیاری و در دیگر کلاس‌های بافتی توصیه می‌شود.

کمترین خطا را داشت. به نظر می‌رسد با سبک‌تر شدن بافت برآورد مدل اسکگز و با سنگین‌ترین شدن بافت برآورد مدل گری بهبود می‌یابد. همچنین در برخی کلاس‌های بافتی مقدار خطای مدل اسکگز با افزایش ضریب یکنواختی و ضریب انحناء تمایل به کاهش و خطای ناشی از مدل گری تمایل اندکی به افزایش دارد. در مجموع کارایی مدل اسکگز در همه‌ی کلاس‌های بافتی به غیر از کلاس رسی (C) اندکی بهتر از کارایی مدل گری است. برتری

## منابع

- ۱- فولادمند ح.ر.، سپاسخواه ع.ر.، و نیازی ج. ۱۳۸۳. تخمین منحنی مشخصه آب خاک با استفاده از منحنی دانه‌بندی و چگالی ظاهری خاک. علوم و فنون کشاورزی و منابع طبیعی. سال ۸ ش ۳: ۱-۱۳.
- ۲- فولادمند ح.ر. ۱۳۸۶. بهبود منحنی مشخصه آب- خاک با استفاده از منحنی دانه‌بندی و چگالی ظاهری خاک. علوم و فنون کشاورزی و منابع طبیعی. سال ۱۱ ش ۴۱: ۶۳-۷۲.
- ۳- نبی زاده ا. ۱۳۸۷. اثر حذف کربنات کلسیم بر بافت و مدل‌های توزیع اندازه ذرات خاک و تخمین ضرایب منحنی رطوبتی پایانامه کارشناسی ارشد گروه علوم خاک دانشکده کشاورزی دانشگاه شهرکرد. ص ۱۴۸-۱۴۶.
- 4- Arya L.M., and Paris J.F. 1981. A physicoempirical model to predict the soil moisture characteristic from particle-size distribution and bulk density data. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 45: 1023-1030.
- 5- Buchan G.D. 1989. Applicability of the simple lognormal model to particle-size distribution in soils. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 147: 155-161.
- 6- Buchan G.D., Grewal K.S., and Robson A.B. 1993. Improved models of particle-size distribution: An illustration of model comparison techniques. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 57: 901-908.
- 7- Filgueira R.R., Fournier L.L., Cerisola C.I., Gelati P., and Garcia M.G. 2006. Particle-size distribution in soil: A critical study of the fractal model validation. *Geoderma*, 134: 327-334.
- 8- Fooladmand H.R., and Sepaskhah A.R. 2006. Improved estimating of the particle-size distribution from textural data. *Biosystems Engineering*, 94: 133-138.
- 9- Hwang S.I. 2004. Effect of texture on the performance of soil particle-size distribution models. *Geoderma*, 123: 363-371.
- 10- Hwang S.I., Lee K.P., Lee D.S., and Powers S.E. 2002. Models for estimating soil particle-size distributions. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 66: 1143-1150.
- 11- Mao M., and Chirwa E.C. 2006. Application of grey model GM(1,1) to vehicle fatality risk estimation. *Technol. Forecast. Social Change*. 73:588-605.
- 12- Prosperini N., and Perugini D. 2008. Particle size distributions of some soils from the Umbria Region (Italy): Fractal analysis and numerical modeling. *Geoderma*, 145: 185-195.
- 13- Skaggs T.H., Arya L.M., Shouse P.J., and Mohanty B.P. 2001. Estimating particle-size distribution from limited soil texture data. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 65: 1038-1044.
- 14- SoilVision Systems Ltd. 2005. SoilVison 4. [www.soilvision.com](http://www.soilvision.com)
- 15- Wu C., Wen J., and Chang K. 2009. Evaluation of the Gray Model GM(1,1) applied to soil particle distribution. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 73:1775-1785.

## Evaluation and Comparison of Grey GM (1,1) and Skaggs Models in Estimating Particle Size Distribution of Soils in the Shahrekord Plain

H. Beigi Harchegani<sup>1\*</sup> - Y. Ostovari<sup>2</sup>

Received:28-12-2010

Accepted:4-11-2012

### Abstract

Particle size distribution (PSD) is one of the most important soil physical properties. The Grey Model GM(1,1) is a new method and different from empirical and parametrical models for description and estimation of soil particle size distribution. In this study, the models of Grey GM(1,1) and Skaggs have been used to estimate PSD in five soil textural classes including 138 soil samples taken from Shahrekord Plain. For evaluating and comparison of two models, four statistical indices (MSE, MAPE, AAE, R<sup>2</sup>) and 1:1 lines were used. The results showed that the performance of both models was relatively good in all five textures. However, Skaggs and Grey GM(1,1) had the best performance in loam and clay textures, respectively. It seems that the performance of Skaggs and Grey GM(1,1) models improved when soil textures changed to coarser and finer textures, respectively. Absolute cumulative error (AAE) of the Skaggs model in some textures tended to decrease while that of the Grey GM(1,1) tended to slightly increase with increasing uniformity and curvature indices of soil.

**Keywords:** Grey GM(1,1) model, Skaggs model, Shahrekord plain, Particle size distribution

---

1,2- Assistant Professor and PhD Student, Department of Soil Science, University of Shahrekord, Shahrekord, Iran  
(\*-Corresponding Author Email: beigi.habib@gmail.com)