

## حل تقریبی معادله ریچاردز برای نفوذ آب در خاک با استفاده از مقیاس سازی

مرتضی صادقی<sup>۱\*</sup> - بیژن قهرمان<sup>۲</sup> - علی نقی ضیائی<sup>۳</sup> - کامران داوری<sup>۴</sup>

تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۸/۲۴

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۲/۴/۲۳

### چکیده

پس از ارائه نظریه محیط‌های متشابه، روش‌های مقیاس‌سازی زیادی به منظور غلبه بر مشکل تغییرپذیری خاک‌ها و نیز رسیدن به حل‌های عمومی معادله ریچاردز توسعه یافته و به گستردگی به کار رفته‌اند. به تازگی، روشی برای مقیاس‌سازی معادله ریچاردز برای خاک‌های غیرمتشابه ارائه شده است به نحویکه معادله مقیاس‌شده برای گستره وسیعی از خاک‌ها مستقل از ویژگی‌های خاک می‌باشد. در این روش، برای بیان ویژگی‌های هیدرولیکی خاک‌ها از توابع توانی - نمایی استفاده می‌شود که برای گستره محدودی از رطوبت و پتانسیل ماتریک خاک کارایی دارد. به همین دلیل، این روش برای فرآیندهایی که در آن‌ها رطوبت یا پتانسیل ماتریک از این گستره تجاوز کند، قابل کاربرد نیست. بنابراین، این مطالعه با هدف عمده بسط این روش برای گستره وسیع‌تری از رطوبت و پتانسیل ماتریک خاک انجام شد. این هدف با اصلاح توابع هیدرولیکی توانی - نمایی محقق گردید و روش مقیاس‌سازی برای گستره کامل رطوبتی (از اشباع تا خشک) بسط داده شد. هدف دیگر این تحقیق حل معادله ریچاردز برای شرایط نفوذ آب در خاک با استفاده از روش مقیاس‌سازی پیشنهادی، بوده است. برای این منظور، حل‌های عددی معادله مقیاس‌شده ریچاردز با استفاده از یک شکل مقیاس‌شده معادله سه-جزئی فیلیپ با ضرایب مستقل از خاک، تقریب زده شد. حل تقریبی به دست آمده با استفاده از داده‌های موجود در منابع حاصل از آزمایش‌های نفوذ بر روی یک خاک شنی و دو خاک رسی مورد ارزیابی قرار گرفت. نتایج نشان داد که حل مذکور قادر است تخمینی قابل قبول (با بیشترین میانگین خطای نسبی ۹٪ برای موارد مطالعه شده) از مقادیر اندازه‌گیری شده نفوذ آب در خاک ارائه دهد. همچنین نشان داده شد که این حل می‌تواند با دقت بالایی (با بیشترین میانگین خطای نسبی ۴٪ برای موارد مطالعه شده) حل عددی معادله ریچاردز را (در شرایط برابر و با استفاده از توابع هیدرولیکی یکسان) تقریب بزند. بر این اساس و به دلیل سادگی کاربرد، این حل به عنوان جایگزینی برای حل عددی معادله ریچاردز و یا سایر معادلات تجربی نفوذ، پیشنهاد می‌شود. همچنین این حل می‌تواند به سادگی برای تعیین توابع هیدرولیکی خاک‌ها با استفاده از حل معکوس به کار گرفته شود.

**واژه‌های کلیدی:** تغییرپذیری، خاک‌های متشابه، خاک‌های غیرمتشابه، توابع هیدرولیکی توانی - نمایی

### مقدمه

برخی روش‌های کلاسیک مقیاس‌سازی معادله ریچاردز توسط ریچاردز و همکاران (۱۴)، واریک و آموزگار-فرد (۲۳)، واریک و همکاران (۲۵)، اسپوزیتو و جوری (۱۹)، ووگل و همکاران (۲۲)، کوتیلک و همکاران (۱۰) و واریک و حسین (۲۴)، با ارائه تعاریف متفاوت از عوامل مقیاس، شرح داده شدند. از یک نقطه نظر، روش‌های مذکور می‌توانند به دو گروه تقسیم شوند (۹). گروه نخست شامل روش‌هایی می‌باشد که در آن‌ها فاکتورهای مقیاس از توابع هیدرولیکی خاک مشتق می‌شوند به نحویکه منجر به یکتایی توابع هیدرولیکی مقیاس‌شده گردند. بنابراین، فاکتورهای مقیاس در این روش‌ها کمیتهای ثابتی برای هر خاک و مستقل از شرایط مرزی و اولیه می‌باشند. با استفاده از این روش‌ها، حل‌های مقیاس‌شده معادله ریچاردز برای خاک‌های متشابه تنها زمانی یکتا خواهند بود که شرایط مرزی و اولیه مقیاس‌شده در این خاک‌ها یکسان باشند. شرط مذکور

پس از ارائه نظریه محیط‌های متشابه توسط میلر و میلر (۱۱)، روش‌های مقیاس‌سازی زیادی به منظور غلبه بر مشکل تغییرپذیری خاک‌ها بر پایه این نظریه توسعه یافته و به گستردگی به کار رفته‌اند (۱، ۸، ۱۲، ۱۸، ۲۰، ۲۲ و ۲۶). یکی از کاربردهای روش‌های مقیاس‌سازی، ارائه حل‌های عمومی معادله ریچاردز است، به گونه‌ای که بتوان از یک حل برای خاک‌ها و شرایط مختلفی استفاده نمود. بر این اساس، این روش‌ها به کاهش حجم محاسبات پیچیده عددی به ویژه در خاک‌های غیرهمگن کمک قابل ملاحظه‌ای می‌کنند (۲۴).

۱، ۲، ۳ و ۴ - به ترتیب دانش آموخته دکتری، استاد، استادیار و دانشیار گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه فردوسی مشهد  
\* - نویسنده مسئول  
(Email: m.sadeghi.um@gmail.com)

جدیدی برای مقیاس‌سازی معادله ریچاردز برای شرایط نفوذ و زهکشی ارائه نمودند. حل‌های مقیاس‌شده با این روش‌ها برای گستره وسیعی از خاک‌های غیرمتشابه، مستقل از ویژگی‌های هیدرولیکی و شرایط مرزی یا اولیه می‌باشند.

صادقی و همکاران (۱۶) تابع هدایت هیدرولیکی نمایی گاردنر (۶) را در ترکیب با منحنی مشخصه نمایی اختیار نمودند که نسبت به توابع هیدرولیکی رایج‌تر (مانند ون‌گنوختن و بروکس-کوری) از کارایی کمتری برخوردار هستند. صادقی و همکاران (۱۷) از یک سری توابع توانی - نمایی استفاده نمودند که قابلیت مدل‌سازی خاک‌های بیشتری را نسبت به توابع نمایی در روش صادقی و همکاران (۱۶) دارند. هرچند، این روش نیز برای محدوده خاصی از رطوبت و پتانسیل ماتریک خاک قابل کاربرد است و به فرآیندهای محدود می‌شود که از این محدوده رطوبتی تجاوز نکنند. برای رفع این محدودیت، در این مقاله نخست روش صادقی و همکاران (۱۷) برای گستره وسیع‌تری از رطوبت خاک بسط داده می‌شود. سپس از این روش برای اشتقاق حل‌های تقریبی معادله ریچاردز برای شرایط نفوذ آب در خاک استفاده می‌شود. در نهایت حل‌های به دست آمده با استفاده از داده‌های موجود در منابع مورد ارزیابی قرار می‌گیرند.

### پس‌زمینه نظری

معادله یک بعدی ریچاردز به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial h}{\partial z} - K \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( D \frac{\partial \theta}{\partial z} - K \right) \quad (1)$$

که در آن،  $\theta$  درصد رطوبت حجمی خاک،  $h$  پتانسیل ماتریک،  $K$  هدایت هیدرولیکی غیراشباع،  $D$  ضریب پخشیدگی هیدرولیکی خاک،  $t$  زمان و  $z$  عمق خاک می‌باشد.  $K$  و  $D$  توابعی از  $\theta$  و یا  $h$  می‌باشند. صادقی و همکاران (۱۷) توابع توانی - نمایی زیر را برای نمایش ویژگی‌های هیدرولیکی خاک‌ها فرض نمودند:

$$h = h_b \exp \left[ \frac{s}{v} (\theta_s - \theta) \right] \quad (\theta \geq \theta_t) \quad (2)$$

$$K = K_s \left( h / h_b \right)^{-v} = K_s \exp \left[ s (\theta - \theta_s) \right] \quad (\theta \geq \theta_t) \quad (3)$$

$$D = K \frac{dh}{d\theta} = -\frac{K_s h_b s}{v} \exp \left[ \frac{s(v-1)}{v} (\theta - \theta_s) \right] \quad (\theta \geq \theta_t) \quad (4)$$

که در آن‌ها،  $\theta_s$  درصد رطوبت حجمی اشباع خاک،  $h_b$  مکش ورود هوا،  $K_s$  هدایت هیدرولیکی اشباع خاک و  $s$  و  $v$  پارامترهای شکل این توابع می‌باشند. به دلیل محدودیت شکل نمایی توابع هیدرولیکی در

به عنوان محدودیتی برای این روش‌ها به شمار می‌آید. روش‌های واریک و آموزگار-فرد (۲۳)، واریک و همکاران (۲۵) و ووگل و همکاران (۲۲) مثال‌هایی از این دست می‌باشند.

در گروه دوم، فاکتورهای مقیاس علاوه بر در نظر گرفتن توابع هیدرولیکی خاک‌ها، شرایط مرزی و اولیه حاکم بر حل را نیز مدنظر قرار می‌دهند، به نحویکه شرایط مرزی و اولیه مقیاس‌شده در همه حالات ثابت و تغییرناپذیر باشند. برتری عمده این روش‌ها در مقایسه با روش‌های گروه نخست این است که حل‌های مقیاس‌شده معادله ریچاردز به شرایط مرزی و اولیه وابسته نخواهند بود. اما این روش‌ها در مقایسه با روش‌های گروه نخست، به فرایندهای آبی و یا مدل‌های هیدرولیکی خاصی محدود می‌شوند. ریچارد و همکاران (۱۴) روشی از این دست را برای مقیاس‌سازی معادله ریچاردز تنها در شرایط نفوذ افقی به خاک‌های یکنواخت ارائه نمودند. سیمونز و همکاران (۱۸) نیز روشی را برای مقیاس‌سازی معادله ریچاردز برای فرایند توزیع مجدد ارائه نمودند. آن‌ها فرض کردند که توابع هیدرولیکی خاک از مدل‌های نمایی پیروی می‌کنند. کوتلیک و همکاران (۱۰) شکل مقیاس‌شده‌ای از معادله ریچاردز برای شرایط نفوذ با شار مرزی ثابت ارائه کردند. در این روش حل‌های مقیاس‌شده نسبت به شار مرزی تغییرناپذیر می‌باشند. واریک و حسین (۲۴) نیز حل‌های مقیاس‌شده دیگری برای شرایط نفوذ با شار و بار آبی مرزی ثابت و همچنین برای شرایط زهکشی داخلی در یک ستون نیمه متناهی ارائه نمودند. در هر دو مطالعه اخیر، توابع هیدرولیکی خاک‌ها تنها به مدل‌های توانی بروکس و کوری (۵) محدود شده‌اند.

صادقی و همکاران (۱۵) با نگاهی جدید به روش‌های گروه دوم، روشی برای مقیاس‌سازی معادله ریچاردز در شرایط توزیع مجدد ارائه نمودند، به نحویکه این روش به شکل خاصی از توابع هیدرولیکی محدود نشود و امکان استفاده از همه مدل‌های ارائه شده برای توابع هیدرولیکی در حل معادله ریچاردز وجود داشته باشد. آن‌ها نشان دادند که با استفاده از این روش، حل‌های مقیاس‌شده معادله ریچاردز مستقل از شرایط اولیه بوده و برای گستره وسیعی از خاک‌ها یکتا می‌باشند.

یک محدودیت عمده در روش‌های مقیاس‌سازی معادله ریچاردز (هر دو گروه) آن است که این روش‌ها همگی برای خاک‌های به اصطلاح "متشابه" (دارای تشابه هندسی و یا تشابه در شکل توابع هیدرولیکی) قابل کاربرد هستند. وجود شرط تشابه محدودیتی بزرگ در کاربرد این روش‌ها در شرایط واقعی محسوب می‌شود. چراکه در واقعیت و در برخورد با خاک‌های طبیعی، فرض تشابه خاک‌ها به ندرت اعتبار می‌یابد. این مساله در مناطق وسیع‌تر و با تغییرپذیری مکانی زیادتر (مثلاً در سطح یک حوضه آبریز) نمایان‌تر می‌باشد (۲). برای رفع این مشکل، اخیراً صادقی و همکاران (۱۶) و (۱۷) با در نظر گرفتن توابع خاصی برای ویژگی‌های هیدرولیکی خاک روش‌های

$$D_1^* = \exp \left[ -\frac{s(v-1)}{v} (\theta_0 - \theta_1) \right] \quad (۱۶)$$

ترکیب معادلات ۱۵ و ۱۶ منجر به معادله زیر می‌گردد:

$$K_1^* = (D_1^*)^{v/(v-1)} \quad (۱۷)$$

صادقی و همکاران (۱۷) نشان دادند که حل معادله مقیاس شده ریچاردز با کاربرد توابع هیدرولیکی مقیاس شده ۱۳ و ۱۴ در دو گروه کلی از شرایط، مستقل از ویژگی‌های هیدرولیکی خاک و شرایط مرزی یا اولیه می‌باشد: الف) زمانی که برای همه حل‌های موردنظر  $D_1^*$  یکسان و تاثیر نیروی ثقل در برابر نیروی موینگی ناچیز باشد (مانند نفوذ آب در یک خاک نسبتاً خشک) و ب) زمانی که برای همه حل‌های موردنظر،  $K_1^*$  یکسان و تاثیر نیروی موینگی در برابر نیروی ثقل ناچیز باشد (مانند زهکشی از خاک مرطوب). بنابراین، روش مذکور در این دو حالت به مقیاس‌سازی خاک‌های غیرمتشابه (خاک-های واقعی بدون نیاز به شرط تشابه) می‌انجامد.

### مواد و روش‌ها

#### توابع هیدرولیکی توانی - نمایی اصلاح شده

با در نظر گرفتن توابع هیدرولیکی ۲ تا ۴، روش صادقی و همکاران (۱۷) به فرآیندهایی محدود می‌شود که در آن‌ها رطوبت خاک در هیچ مکان و زمانی از  $\theta_r$  کمتر نشود. همچنین در این روش، پتانسیل ماتریک متناظر با درصد رطوبت اشباع ( $\theta_s$ ) برابر با مکش ورود هوا ( $h_b$ ) می‌باشد. بنابراین، روش مقیاس‌سازی به فرآیندهایی محدود می‌شود که در آن‌ها پتانسیل ماتریک از  $h_b$  تجاوز نکند. برای رفع این دو محدودیت، در این مقاله توابع هیدرولیکی توانی - نمایی به صورت زیر اصلاح می‌شوند:

$$\begin{cases} h = h_b \left\{ \exp \left[ \frac{s}{v} (\theta_s - \theta) \right] - 1 \right\} & (\theta \geq \theta_r) \\ \theta = \theta_r & (h < h_b) \end{cases} \quad (۱۸)$$

$$K = K_s (1 + h/h_b)^{-v} = \quad (۱۹)$$

$$K_s \exp \left[ s(\theta - \theta_s) \right] \quad (\theta \geq \theta_r)$$

$$D = K \frac{dh}{d\theta} = -\frac{K_s h_b s}{v} \exp \left[ \frac{s(v-1)}{v} (\theta - \theta_s) \right] \quad (\theta \geq \theta_r) \quad (۲۰)$$

در رابطه ۱۸،  $h_r$  پتانسیل ماتریک متناظر با  $\theta_r$  از بخش اول این معادله می‌باشد.

با کاربرد توابع اصلاح شده ۱۸، ۱۹ و ۲۰، معادلات مقیاس‌شده

برازش به داده‌های واقعی، صادقی و همکاران (۱۷) به طور تجربی رطوبت آستانه  $\theta_t$  (در محدوده بین  $\theta_s$  و درصد رطوبت باقیمانده،  $\theta_r$ ) را تعریف نموده و کاربرد این توابع را به محدوده رطوبتی بین  $\theta_t$  و  $\theta_s$  محدود نمودند. در مطالعه آنها،  $\theta_t$  به صورت تجربی از برازش تابع (۲) در ترکیب با یک تابع کارا تر برای محدوده رطوبتی بین  $\theta_t$  و  $\theta_r$  (معادله ۲۹ آنها) بر روی داده‌های خاک‌های مطالعه‌شده به دست آمد. صادقی و همکاران (۱۷) متغیرهای مقیاس شده زیر را تعریف نمودند:

$$\theta^* = \frac{\theta - \theta_1}{\theta_0 - \theta_1} \quad (۵)$$

$$h^* = \frac{h}{z_0} \quad (۶)$$

$$K^* = \frac{K}{K_0} \quad (۷)$$

$$D^* = \frac{D}{D_0} \quad (۸)$$

$$z^* = \frac{z}{z_0} \quad (۹)$$

$$t^* = \frac{K_0 t}{(\theta_0 - \theta_1) z_0} \quad (۱۰)$$

که در آن‌ها، بالانویس ستاره نشان‌دهنده مقدار مقیاس شده هر متغیر،  $\theta_0$  رطوبت مرزی در سطح خاک (در شرایط نفوذ)،  $\theta_1$  رطوبت اولیه خاک،  $K_0 = K(\theta_0)$ ،  $D_0 = D(\theta_0)$  و  $z_0$  عامل مقیاس طول می‌باشد که به صورت زیر تعریف گردیده است:

$$z_0 = \frac{D_0 (\theta_0 - \theta_1)}{K_0} \quad (۱۱)$$

از ترکیب معادلات ۱ تا ۱۰ معادله مقیاس شده ریچاردز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} = \frac{\partial}{\partial z^*} \left( D^* \frac{\partial \theta^*}{\partial z^*} - K^* \right) \quad (۱۲)$$

که در آن توابع هیدرولیکی مقیاس شده از معادله‌های زیر تبعیت می‌کنند:

$$K^* = \exp \left[ \ln K_1^* (1 - \theta^*) \right] \quad (۱۳)$$

$$D^* = \exp \left[ \ln D_1^* (1 - \theta^*) \right] \quad (۱۴)$$

به نحویکه  $K_1^* = K(\theta_1)/K_0$  و  $D_1^* = D(\theta_1)/D_0$  صادقی و همکاران (۱۷) نشان دادند که معادلات زیر برقرار است:

$$K_1^* = \exp \left[ -s(\theta_0 - \theta_1) \right] \quad (۱۵)$$

$$\begin{cases} I^* = At^{*0.5} + Bt^* + Ct^{*1.5} & (t^* \leq t_g^* \approx A^2) \\ I^* = I^*(t_g^*) + t^* - t_g^* & (t^* > t_g^*) \end{cases} \quad (23)$$

در آن،  $I^*$  نفوذ تجمعی مقیاس شده،  $t_g^*$  شکل مقیاس شده زمان غالب شدن اثر نیروی ثقل بر نفوذ آب در خاک و  $A$ ،  $B$  و  $C$  ضرایب شکل منحنی نفوذ می‌باشند. رابطه زیر بین نفوذ تجمعی مقیاس شده و نفوذ تجمعی واقعی،  $I$ ، برقرار می‌باشد (۱۷):

$$I^* = \frac{I}{z_0(\theta_0 - \theta_1)} \quad (24)$$

از آنجا که حل‌های مقیاس شده مستقل از ویژگی‌های خاک هستند، ضرایب معادله ۲۳ برای خاک‌های مختلف یکسان و تنها تابعی از مقادیر  $D_1^*$  می‌باشند. بر این اساس، برای مقادیر مختلف  $D_1^*$ ، ضرایب  $A$ ،  $B$  و  $C$  از بهترین برازش معادله ۲۳ به حل‌های مقیاس شده چهار خاک مذکور به دست آمدند. با کاربرد معادلات ۱۰ و ۲۴، می‌توان معادله ۲۳ را از مقیاس خارج کرد. بنابراین، معادله ۲۳ با ضرایب معین یک حل تقریبی برای معادله ریچاردز برای برآورد نفوذ آب در خاک ارائه می‌دهد.

## نتایج و بحث

### حل معادله مقیاس شده ریچاردز

نتایج حل معادله مقیاس شده ریچاردز، معادله ۱۲، با توابع هیدرولیکی مقیاس شده ۱۳ و ۱۴ برای خاک‌های مختلف و دو مقدار متفاوت از  $D_1^*$  در شکل ۱ نشان داده شده است. مقادیر معینی از  $D_1^*$  بسته به پارامترهای هیدرولیکی و همچنین رطوبت مرزی خاک (طبق معادله ۱۶) می‌توانند معرف مقادیر متفاوتی از رطوبت اولیه خاک،  $\theta_1$ ، باشند. اما به طور کلی (برای یک خاک با بافت متوسط و رطوبت مرزی نزدیک به اشباع)،  $D_1^* = 0.1$  و  $D_1^* = 0.0001$  به ترتیب معرف رطوبت‌های اولیه نزدیک به اشباع و خشک می‌باشند. مطابق با نتایج صادقی و همکاران (۱۷)، نتایج مقیاس شده در شکل ۱ برای خاک‌های مختلف تقریباً یکسان می‌باشند. با این حال در رطوبت‌های اولیه زیاد ( $D_1^*$  بزرگ)، انحراف اندکی در نتایج خاک شن مشاهده می‌شود که ناشی از غلبه نیروی ثقل در فرآیند نفوذ می‌باشد (۱۷) (یادآوری می‌شود که شرط یکتایی حل‌های مقیاس شده در شرایط نفوذ ناچیز بودن نیروی ثقل می‌باشد). به دلیل پراکندگی اندک نتایج حل‌های مقیاس شده معادله ریچاردز، معادله ۲۳ برازش خوبی به این حل‌ها داشته است. این نتیجه بیانگر این مفهوم است که با مقادیر منحصر به فردی از ضرایب  $A$ ،  $B$  و  $C$  می‌توان معادله ۲۳ را برای خاک‌های متفاوتی (به بیان دیگر، غیرمتشابه) به کار برد.

۱۲، ۱۳ و ۱۴ بدون تغییر باقی می‌مانند. این در حالی است که رطوبت خاک می‌تواند در محدوده  $\theta_s$  تا  $\theta_r$  تغییر کند و دیگر تنها به مقادیر بزرگتر از  $\theta_r$  محدود نمی‌شود. به علاوه، با چنین توابع اصلاح شده‌ای، پتانسیل ماتریک متناظر با درصد رطوبت اشباع ( $\theta_s$ ) برابر با صفر است. بنابراین، روش مقیاس‌سازی محدوده بین  $h_b$  و صفر را نیز پوشش می‌دهد. به بیان دیگر، با کاربرد توابع ۱۸ تا ۲۰، روش مقیاس‌سازی صادقی و همکاران (۱۷) برای محدوده پتانسیل‌های ماتریک صفر تا منفی بی‌نهایت بسط داده می‌شود.

### حل تقریبی معادله ریچاردز برای نفوذ آب در خاک

در این تحقیق، شرایط نفوذ به داخل یک خاک همگن نیمه بینهایت با رطوبت مرزی ثابت  $\theta_0$  و رطوبت اولیه یکنواخت  $\theta_1$  در نظر گرفته شد:

$$\theta(0, t) = \theta_0, \quad \theta(z, 0) = \theta_1 \quad (21)$$

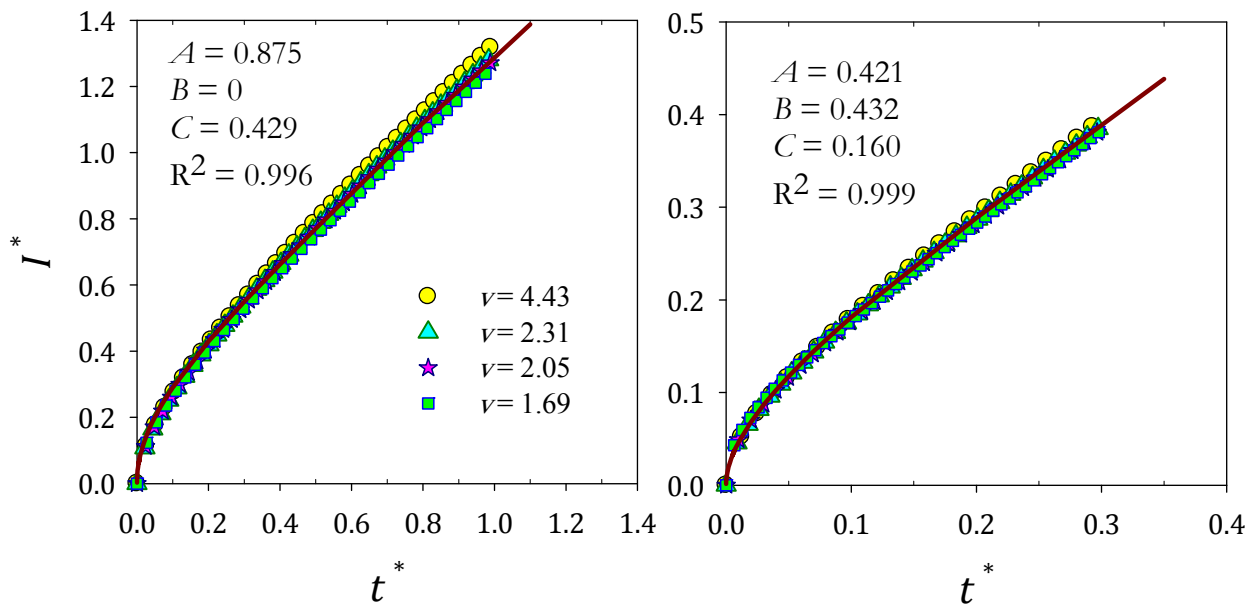
با توجه به معادلات ۵، ۹ و ۱۰، شرایط اولیه و مرزی مقیاس شده زیر به دست می‌آیند:

$$\theta^*(0, t^*) = 1, \quad \theta^*(z^*, 0) = 0 \quad (22)$$

برای فرآیند نفوذ، برابری  $D_1^*$  برای خاک‌های مختلف به یکتایی حل‌های مقیاس شده در آن خاک‌ها می‌انجامد (۱۷). با این شرط برابری، در حل معادله مقیاس شده ریچاردز با شرایط مرزی و اولیه موردنظر (معادله ۲۲) که مستقل از ویژگی‌های خاک می‌باشد، تنها پارامتر وابسته به خاک، پارامتر  $\nu$  می‌باشد که طبق معادله ۱۷،  $D_1^*$  را به  $K_1^*$  مربوط می‌سازد. صادقی و همکاران (۱۷) نشان دادند زمانیکه اثر نیروی ثقل در شرایط نفوذ اندک هست، تاثیر تغییرپذیری  $K_1^*$  در اثر تغییرپذیری خاک ( $\nu$ ) ناچیز می‌باشد. بنابراین، حل‌های مقیاس شده معادله ریچاردز برای محدوده وسیعی از خاک‌ها و شرایط مرزی مختلف یکسان بوده و تنها با تغییر شرایط اولیه رطوبتی (تغییر مقادیر  $D_1^*$ ) تغییر خواهند کرد.

به منظور تعیین وابستگی حل‌های مقیاس شده به  $D_1^*$ ، مقادیر مختلفی برای آن به گونه‌ای در نظر گرفته شد که برای خاک‌های مختلف، طبق معادله ۱۶، محدوده رطوبتی وسیعی (بین اشباع تا خشک) را پوشش دهد. در هر مورد، معادله ریچاردز مقیاس شده (معادله ۱۲) برای چهار مقدار مختلف  $\nu$  متناظر با چهار کلاس بافتی مختلف (۱۷)، شن ( $\nu = 4.43$ )، لوم ( $\nu = 2.31$ )، رس سیلتی ( $\nu = 2.05$ ) و رس ( $\nu = 1.69$ )، به صورت عددی و با استفاده از روش تفاضل‌های محدود حل گردید.

برای تقریب حل‌های مقیاس شده نفوذ، از شکل مقیاس شده معادله سه جزئی فیلپ (۲۵) استفاده شد:



شکل ۱ - نتایج حل معادله مقیاس شده ریچاردز برای خاک‌های مختلف با رطوبت اولیه متناظر با  $D_1^* = 0.1$  (سمت چپ) و  $D_1^* = 0.0001$  (سمت راست).  $A$ ،  $B$  و  $C$  ضرایب معادله ۲۳ می‌باشند که از بهترین برازش این معادله (خط ممتد) به حل‌های مقیاس شده به دست آمدند.  $R^2$  ضریب تعیین می‌باشد.

به شمار آید.

لازم به ذکر است که در این تحقیق (که در بخش بعدی نشان داده می‌شود) برای یافتن ضرایب  $A$ ،  $B$  و  $C$  به ازای  $D_1^*$ ‌های مختلف، از ضرایب مربوط به نزدیکترین  $D_1^*$  در جدول ۱ استفاده شده و خط‌های حاصل از این تقریب مورد بررسی قرار گرفت. شایان ذکر است که ارائه مدلی تجربی (مانند مدل‌های رگرسیونی، شبکه عصبی مصنوعی و ...) که بتواند به ازای هر  $D_1^*$  مشخص، مقادیر ضرایب  $A$ ،  $B$  و  $C$  را تقریب زند، در حیطه هدف این مقاله نبوده و می‌تواند از جمله اهداف تحقیقات آینده در این راستا باشد. این امر از طریق حل معادله مقیاس شده ریچاردز برای دهها یا صدها مقدار  $D_1^*$  و تعیین ضرایب  $A$ ،  $B$  و  $C$  در هر حل (با روشی مشابه با روش این تحقیق و یا هر روش مناسب دیگر)، امکان‌پذیر خواهد بود.

ضرایب  $A$ ،  $B$  و  $C$  برای مقادیر مختلف  $D_1^*$  در جدول ۱ ارائه شده‌اند که به طور مشابه از برازش معادله ۲۳ به حل‌های معادله مقیاس شده ریچاردز به دست آمده‌اند. در همه موارد، ضریب تعیین برازش بالا بوده است که نشان‌دهنده موفقیت روش مقیاس‌سازی (تغییرپذیری ناچیز حل‌های مقیاس شده) می‌باشد. جدول ۱ به جداول ۲ و ۴ واریک و همکاران (۲۵) شباهت دارد که در آن‌ها نیز ضرایب  $A$ ،  $B$  و  $C$  برای معادله ۲۳ (معادلات ۱۸ و ۲۶ واریک و همکاران)، به عنوان حلی از معادله مقیاس شده ریچاردز، ارائه شده‌اند. در جداول واریک و همکاران، ضرایب به‌ازای مقادیر مختلف از رطوبت اولیه مقیاس شده و همچنین عامل شکل توابع هیدرولیکی (به عنوان معیاری برای تعیین تشابه خاک‌ها)، ارائه شده‌اند. تفاوت در ابعاد جدول ۱ (دو بعدی) با جداول واریک و همکاران (سه بعدی)، می‌تواند به عنوان یکی از برتری‌های مقیاس‌سازی معادله ریچاردز برای خاک‌های غیرمتشابه (مقیاس‌سازی بدون نیاز به شرط تشابه خاک‌ها)

جدول ۱ - ضرایب معادله ۲۳ حاصل از برازش به حل‌های معادله مقیاس شده ریچاردز

$D_1^*$	$A$	$B$	$C$	$t_g^* = A^2$	$I^*(t_g^*)$	$R^2$
1.00E-1	0.875	0.000	0.429	0.766	1.053	0.996
5.62E-2	0.778	0.083	0.395	0.605	0.842	0.997
3.16E-2	0.706	0.048	0.520	0.498	0.705	0.998
1.00E-2	0.604	0.181	0.425	0.365	0.524	0.998
3.16E-3	0.537	0.260	0.352	0.288	0.418	0.998
1.00E-4	0.421	0.432	0.160	0.177	0.266	0.999
1.00E-6	0.365	0.295	0.440	0.133	0.194	0.999
1.00E-8	0.388	0.000	0.845	0.151	0.200	0.999

## صحت‌سنجی

با توجه به شرایط اشتقاق حل‌های مقیاس‌شده، حل تقریبی پیشنهادی (معادله ۲۳) زمانی قابل کاربرد است که رطوبت اولیه خاک یکنواخت باشد و در خلال فرآیند نفوذ، رطوبت سطح خاک ثابت و بار آبی روی سطح خاک ناچیز یا منفی (در حالت غیراشباع) باشد. با در نظر داشتن این شرایط، برای صحت‌سنجی حل پیشنهادی، داده‌های آزمایش نفوذ بری و همکاران (۳) بر روی یک خاک سنی و همچنین داده‌های مزرعه‌ای بوهنه و همکاران (۴) برای نفوذ آب در یک خاک رسی مورد استفاده قرار گرفتند (داده‌های مربوط به بوهنه و همکاران، از آزمایش‌های ۱،۱ (خاک کشت‌شده) و ۵،۱ (خاک بدون پوشش گیاهی) اخذ شدند). در مطالعات مورد نظر، رطوبت اولیه خاک یکنواخت بود. در آزمایش بری و همکاران، ارتفاع ناچیز آب (حدود ۲ سانتی‌متر) در سطح خاک ثابت نگه داشته شد. بوهنه و همکاران (۴) نیز از شبیه‌ساز باران برای آزمایش نفوذ استفاده کرده و گزارش کردند که زمان اندکی پس از شروع آزمایش (۴ تا ۶ دقیقه) سطح خاک غرقاب و رواناب جاری شد. بنابراین، فرض شد که شرایط ذکرشده برای کاربرد معادله ۲۳، در این آزمایش‌ها برقرار بوده است.

توابع هیدرولیکی خاک سنی در شکل ۲ نشان داده شده است. در این شکل، نقاط نشان‌دهنده مقادیر برگرفته از توابع هیدرولیکی استفاده شده توسط بری و همکاران (۳) با کاربرد پارامترهای گزارش شده می‌باشد و خطوط بهترین برازش توابع توانی - نمایی اصلاح شده، معادلات ۱۸ و ۱۹، و توابع ون‌گنوختن (۲۱) را نشان می‌دهند. همان‌طور که مقادیر میانگین خطای مطلق برازش (MAE)، قدر مطلق میانگین خطای مابین مقادیر اندازه‌گیری شده و برآوردشده در شکل ۲ نشان می‌دهند، توابع توانی - نمایی اصلاح‌شده قابلیت برازش پایین‌تری نسبت به توابع ون‌گنوختن دارند. با این وجود، خطای این توابع در قبال کارایی آن‌ها در مقیاس‌سازی معادله ریچاردز، می‌تواند قابل چشم‌پوشی باشد.

شکل‌های ۳ و ۴ نیز توابع هیدرولیکی خاک رسی مربوط به آزمایش‌های ۱،۱ و ۵،۱ بوهنه و همکاران (۴) را نشان می‌دهند. در این موارد نیز، توابع توانی - نمایی اصلاح شده (به‌ویژه منحنی رطوبتی) برازش چندان خوبی به مقادیر اندازه‌گیری شده نداشته‌اند. منحنی رطوبتی ون‌گنوختن نیز در این خاک‌ها برازش بسیار موفقی نداشته است. دلیل عمده این مساله برازش توامان منحنی رطوبتی و تابع هدایت هیدرولیکی (به حداقل رساندن توامان خطا) به منظور یافتن یک سری پارامتر مشترک در این دو منحنی می‌باشد که نسبت به برازش جداگانه دو منحنی با خطای بیشتری همراه است. به بیان دیگر، مقادیر بهینه پارامترهای مشترک در دو منحنی ( $\alpha$  و  $n$ ) در صورت برازش جداگانه می‌توانند متفاوت باشند. به عنوان مثال، با برازش جداگانه منحنی‌های رطوبتی و هدایت هیدرولیکی ون‌گنوختن

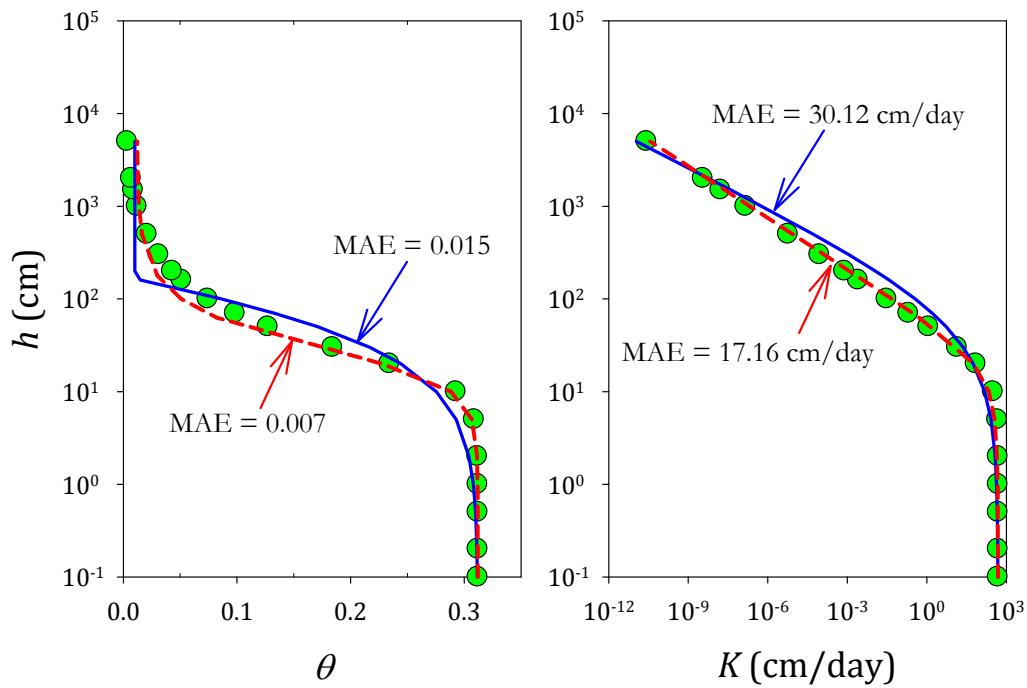
بر روی داده‌های خاک رس (۱،۱)، مقدار  $n$  به ترتیب برابر با ۱/۴۸ و ۱/۹۴ به دست می‌آید.

پارامترهای حاصل از برازش‌ها به همراه شرایط رطوبتی مرزی و اولیه در آزمایش‌های نفوذ در جدول ۲ ارائه شده‌اند. لازم به ذکر است که در این جدول، مقادیر درصد رطوبت اشباع ( $\theta_s$ ) برابر با مقادیر گزارش شده در مراجع اصلی می‌باشند. همچنین، از آنجاکه  $K_s$  بیانگر سرعت نفوذ نهایی حاصل از حل معادله ریچاردز می‌باشد و تاثیر بسزایی در برآورد منحنی‌های نفوذ دارد، به منظور برآورد واقع‌بینانه‌تری از این پارامتر، مقدار آن برابر با سرعت نفوذ نهایی در آزمایش‌های نفوذ انجام شده در نظر گرفته شد. به منظور مقایسه بهتر کارایی دو مدل ون‌گنوختن و توانی - نمایی، دیگر پارامتر مشترک بین دو مدل ( $\theta_r$ ) نیز برای هر دو برابر در نظر گرفته شد.

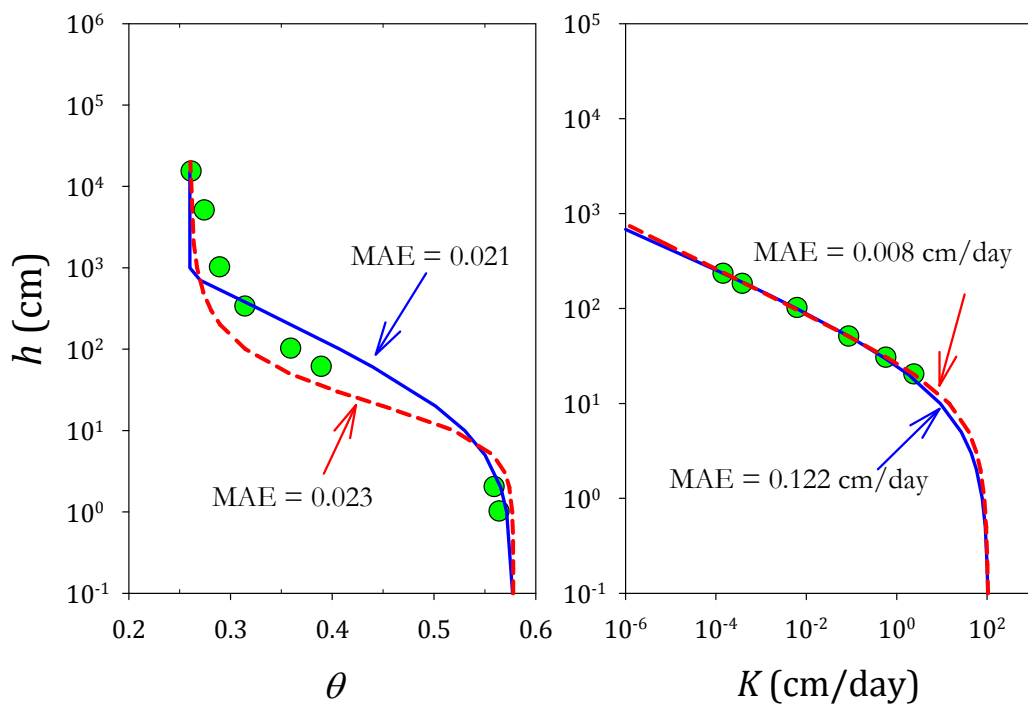
منحنی‌های نفوذ به دست آمده از حل‌های تقریبی (یعنی برآوردهای معادله ۲۳ در ترکیب با معادلات ۱۰ و ۲۴) و عددی معادله ریچاردز در مقایسه با مقادیر اندازه‌گیری شده توسط بری و همکاران (۳) و بوهنه و همکاران (۴) در شکل ۵ نشان داده شده است. برای یافتن ضرایب  $A$ ،  $B$  و  $C$  در معادله ۲۳، مقدار  $D_1^*$  با در نظر گرفتن پارامترهای جدول ۲، از رابطه ۱۶ محاسبه گردید و ضرایب مربوط به نزدیکترین مقدار  $D_1^*$  از جدول ۱ مورد استفاده قرار گرفت. لازم به ذکر است که بوهنه و همکاران (۴) مقادیر اندازه‌گیری شده سرعت نفوذ ( $i$ ) را گزارش کردند که برای تبدیل آن به مقادیر نفوذ تجمعی از برازش معادله توانی و رابطه  $I = \int i dt$  استفاده گردید.

همان‌طور که شکل ۵ نشان می‌دهد، حل‌های مختلف معادله ریچاردز به طور کلی برآوردی نسبتاً منطقی از مقادیر اندازه‌گیری شده نفوذ تجمعی داشته‌اند. هرچند این حل‌ها در مورد آزمایش ۵،۱ بوهنه و همکاران (۴) نفوذ را بیشتر از مقادیر اندازه‌گیری شده تخمین زده‌اند. این مساله احتمالاً به این دلیل می‌باشد که در چند دقیقه ابتدایی این آزمایش (قبل از تشکیل غرقاب روی سطح خاک)، شرایط آزمایش (فرآیند نفوذ با سرعت ثابت) و شرایط حل معادله ریچاردز (فرآیند نفوذ با بار آبی ثابت) هم‌خوانی نداشته‌اند. این بیش‌برآورد در مورد آزمایش ۱،۱ بر روی خاک دارای پوشش گیاهی به چشم نمی‌خورد. روند کاهشی سرعت نفوذ در این مورد نشان می‌دهد که شرایط آزمایش در این خاک به شرایط نفوذ با بار آبی ثابت نزدیک‌تر هست تا شرایط نفوذ با سرعت ثابت.

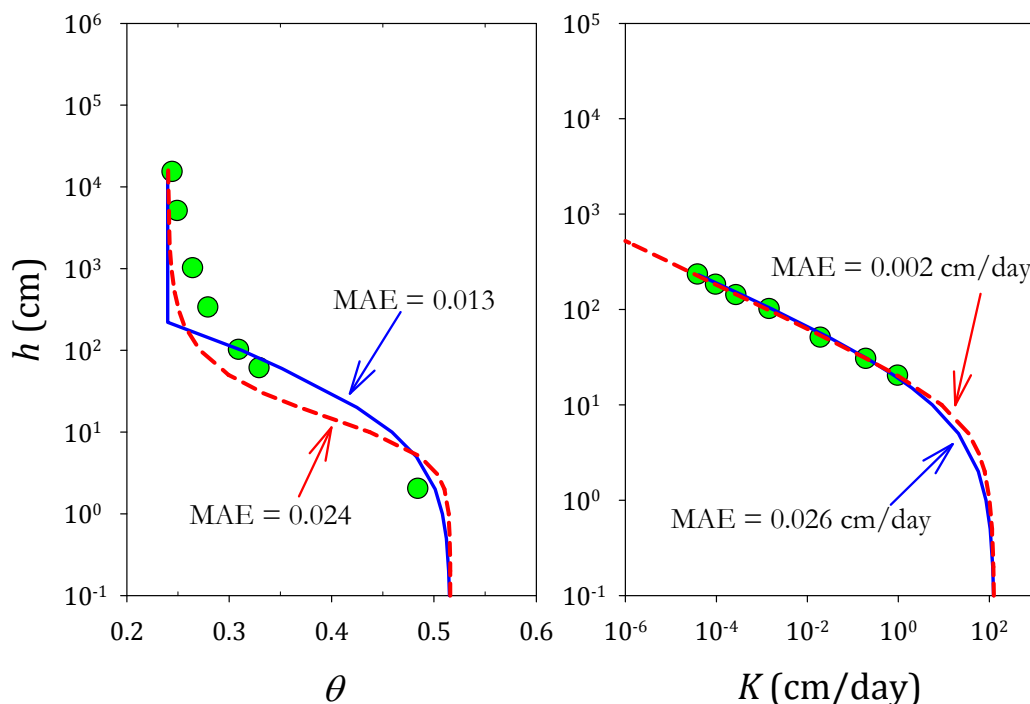
شکل ۵ نشان می‌دهد که در همه موارد، حل تقریبی منتج از معادله ۲۳ با حل معادله ریچاردز با توابع توانی - نمایی اصلاح شده (معادلات ۱۸ تا ۲۰) اختلاف کمی دارد. هرچند در مورد آزمایش‌های بوهنه و همکاران (۴)، اختلاف اندکی بین این دو حل وجود دارد که به دلیل رطوبت اولیه بالا (در جدول ۲) در این آزمایش‌ها و تاثیر آن بر عملکرد مقیاس‌سازی می‌باشد.



شکل ۲ - توابع هیدرولیکی خاک شنی بری و همکاران (۳). دایره‌های توپر، خط ممتد و خط‌چین به ترتیب نشان‌دهنده مقادیر اندازه‌گیری شده، توابع توانی - نمایی اصلاح شده، معادلات ۱۸ و ۱۹، و توابع ون‌گنوختن (۲۱) می‌باشند. MAE میانگین خطای مطلق می‌باشد.



شکل ۳ - توابع هیدرولیکی خاک رسی بوهنه و همکاران (۴) مربوط به آزمایش ۱،۱. دایره‌های توپر، خط ممتد و خط‌چین به ترتیب نشان‌دهنده مقادیر اندازه‌گیری شده، توابع توانی - نمایی اصلاح شده، معادلات ۱۸ و ۱۹، و توابع ون‌گنوختن (۲۱) می‌باشند.



شکل ۴ - توابع هیدرولیکی خاک رسی بوهنه و همکاران (۴) مربوط به آزمایش ۵,۱. دایره‌های توپر، خط ممتد و خط چین به ترتیب نشان‌دهنده مقادیر اندازه‌گیری شده، توابع توانی - نمایی اصلاح شده، معادلات ۱۸ و ۱۹، و توابع ون گنوختن (۲۱) می‌باشند.

جدول ۲ - پارامترهای توابع توانی - نمایی اصلاح شده، معادلات ۱۸ و ۱۹، و توابع ون گنوختن (۲۱) برای خاک‌های مورد مطالعه و شرایط رطوبتی مرزی و اولیه در آزمایش‌های نفوذ.  $\alpha$ ,  $n$  و  $m$  پارامترهای توابع ون گنوختن می‌باشند. اطلاعات خاک‌های شن و رس به ترتیب از مطالعات بری و همکاران (۳) و بوهنه و همکاران (۴) اخذ شده‌اند.

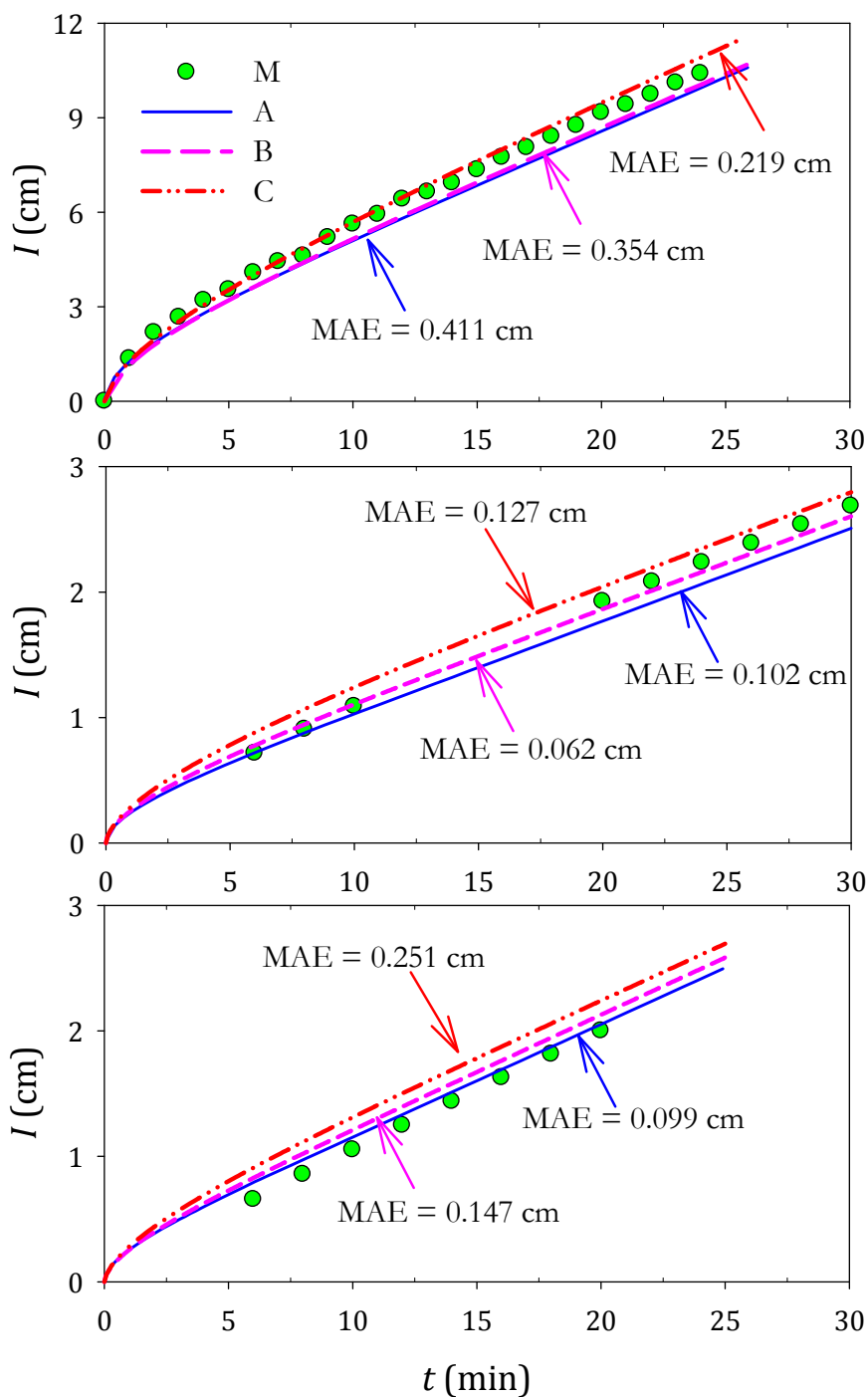
خاک	$\theta_s$	$\theta_r$	$K_s$ (cm/day)	$h_b$ (cm)	$s$	$\nu$	$\alpha$ (cm <sup>-1</sup> )	$n$	$m$	$\theta_0$	$\theta_1$
شن	0.312	0.012	487.44	55.05	31.88	6.95	0.045	2.35	0.57	0.312	0.082
رس (آزمایش ۱,۱)	0.578	0.26	106.56	13.11	65.12	4.80	0.0721	1.89	0.47	0.578	0.453
رس (آزمایش ۵,۱)	0.516	0.24	129.60	11.48	55.32	4.85	0.100	1.94	0.48	0.516	0.391

دارند، می‌باشد. موجه بودن یا نبودن این کم‌برآورد بر اساس دقت مورد انتظار در کاربردهای مختلف معنا می‌یابد. اما آنچه که مسلم است این است که در موارد زیادی، به علت سادگی کاربرد شکل مستقل از خاک معادله ریچاردز که با استفاده از توابع توانی - نمایی اصلاح شده به دست آمده‌اند، می‌توان از خطای موجود چشم‌پوشی کرد. همچنین، سادگی کاربرد حل تقریبی پیشنهادی نسبت به حل عددی معادله ریچاردز، می‌تواند این اختلاف دقت را پوشش دهد. بنابراین، معادله ۲۳ در کاربردهای عملی (یا حتی بعضی از مطالعات نظری) می‌تواند جایگزین مناسبی برای حل عددی معادله ریچاردز محسوب شود.

هم‌خوانی این دو حل نیز نشان‌دهنده کارایی بالای روش مقیاس - سازی پیشنهادی برای معادله ریچاردز می‌باشد، به این معنا که با استفاده از روش، حل‌های به دست آمده برای چند خاک خاص برای خاک‌های دیگری قابل کاربرد هستند. در این مورد خاص که مقادیر  $\nu$  خاک‌های مورد مطالعه (در جدول ۲) همگی خارج از محدوده ۱۷-های هستند که برای تعیین ضرایب معادله ۲۳ به کار رفته‌اند، موفقیت روش مقیاس‌سازی جلوه بیشتری دارد.

همچنین در شکل ۵ دیده می‌شود که حل‌های معادله ریچاردز با استفاده از توابع توانی - نمایی اصلاح شده در مقایسه با زمانی که توابع کاراتر ون گنوختن استفاده می‌شوند، در همه موارد کم‌برآورد دارند. این مساله بازتاب کم‌برآورد رطوبت و هدایت هیدرولیکی در مکش‌های کم (نزدیک به اشباع) که تاثیر بسزایی در فرآیند نفوذ





شکل ۵ - مقایسه منحنی‌های نفوذ حاصل از معادله ۲۳ (خط ممتد، A)، حل عددی معادله ریچاردز با توابع توانی - نمایی اصلاح‌شده (خط چین، B) و توابع ون‌گنوختن (خط - نقطه، C) با مقادیر اندازه‌گیری شده (نقاط، M) توسط بری و همکاران (۳) (بالا)، بوهنه و همکاران (۴) در آزمایش ۱,۱ (وسط) و آزمایش ۵,۱ (پایین)

بوهنه و همکاران (۴) (آزمایش ۱,۱) و بوهنه و همکاران (آزمایش ۵,۱)، به ترتیب در محدوده پتانسیل ماتریک ۱۰- تا ۲۰۰- سانتی‌متر، ۲- تا ۱۰۰۰- سانتی‌متر و ۲- تا ۳۳۰- سانتی‌متر کارایی دارند

با تحلیلی بصری بر روی مقادیر اندازه‌گیری شده توابع هیدرولیکی (شکل‌های ۲، ۳ و ۴ را ببینید) می‌توان دریافت که توابع توانی - نمایی اولیه، معادلات ۲ تا ۴، برای خاک‌های بری و همکاران (۳)،

مستقل از ویژگی‌های هیدرولیکی و شرایط مرزی یا اولیه باشند. این روش به فرآیندهایی محدود می‌شود که در آن‌ها رطوبت خاک در هیچ مکان و زمانی به مقدار کمتر از  $\theta_r$  نرسد و همچنین پتانسیل ماتریک از  $h_b$  تجاوز نکند. در این مقاله، توابع هیدرولیکی توانی - نمایی به نحوی اصلاح شده‌اند که محدودیت‌های مذکور برطرف گردد. بر پایه روش مقیاس‌سازی پیشنهادی، معادله ۲۳ با ضرایب مستقل از خاک که در جدول ۱ ارائه شده‌اند، به عنوان حل تقریبی معادله ریچاردز برای شرایط نفوذ آب در خاک پیشنهاد می‌شود. حل تقریبی مذکور با استفاده از داده‌های آزمایشگاهی (۳) و مزرعه‌ای (۴) مورد ارزیابی قرار گرفت. بر اساس نتایج به دست آمده، می‌توان دریافت که در صورت برآزش مناسب توابع هیدرولیکی اصلاح شده به مقادیر اندازه‌گیری شده، معادله ۲۳ می‌تواند تخمینی قابل قبول از حل عددی معادله ریچاردز و همچنین مقادیر اندازه‌گیری شده نفوذ آب در خاک ارائه دهد. بر این اساس و به دلیل سادگی کاربرد، معادله ۲۳ به عنوان یک جایگزین برای حل عددی معادله ریچاردز و یا سایر معادلات تجربی نفوذ، برای کاربردهای عملی پیشنهاد می‌شود. همچنین این حل می‌تواند به سادگی برای تعیین توابع هیدرولیکی خاک‌ها با استفاده از حل معکوس به کار گرفته شود.

داده‌ها در در این بازه‌ها از یک روند تقریباً خطی در صفحه نیمه-لگاریتمی تبعیت می‌کنند). بنابراین، با کاربرد توابع توانی - نمایی اولیه، روش مقیاس‌سازی و همچنین معادله ۲۳ تنها زمانی کارایی دارند که بار آبی (پتانسیل ماتریک) ثابت در سطح خاک برای سه خاک مذکور به ترتیب از ۱۰- سانتی‌متر، ۲- سانتی‌متر و ۲- سانتی-متر کمتر باشد و رطوبت اولیه از ۰/۰۴۳، ۰/۲۹ و ۰/۲۸ (رطوبت آستانه در این خاک‌ها) کمتر نباشد که محدودیتی عمده می‌باشد. به عنوان مثال، این محدودیت مانع از کاربرد معادلات مقیاس‌شده برای شرایط نفوذ غرقابی یا نفوذ در خاک‌های خیلی خشک که شرایطی متداول در کشاورزی هستند، می‌شود. این در حالیست که با کاربرد توابع توانی - نمایی اصلاح شده، معادلات ۱۸ تا ۲۰، روش مقیاس‌سازی و معادله ۲۳ در محدوده پتانسیل ماتریک صفر تا منفی بی- نهایت قابل کاربرد هستند. این تحلیل نشان‌دهنده اهمیت اصلاح انجام‌شده در توابع هیدرولیکی توانی - نمایی می‌باشد.

## نتیجه‌گیری

صادقی و همکاران (۱۷) با فرض توابع هیدرولیکی توانی - نمایی روشی برای مقیاس‌سازی معادله ریچاردز ارائه نمودند، بنحویکه حل‌های مقیاس شده برای گستره وسیعی از خاک‌های غیرمتشابه،

## منابع

- ۱- صادقی م. و قهرمان ب. ۱۳۸۹. مقیاس‌سازی توامان منحنی رطوبتی و تابع هدایت هیدرولیکی خاک. نشریه آب و خاک (علوم و صنایع کشاورزی)، جلد ۲۴ (۲)، ۳۹۴-۴۰۶.
- ۲- قهرمان ب.، صادقی م. و محمدی ج. ۱۳۹۰. ارزیابی کارایی روش‌های مقیاس‌سازی معادله ریچاردز در مدل‌سازی نفوذ در حوضه آبریز (مطالعه موردی: حوضه مرغلک). نشریه آب و خاک (علوم و صنایع کشاورزی)، جلد ۲۵ (۳)، ۴۵۹-۴۷۱.
- 3- Barry D.A., Parlange J.Y., Haverkamp R., and Ross P.J. 1995. Infiltration under ponded conditions: 4. An explicit predictive infiltration formula. *Soil Sci.* 160 (1): 8-17.
- 4- Bohne K., Roth C., Leij F.J., and Van Genuchten M.Th. 1993. Rapid Method for estimating the unsaturated hydraulic conductivity from infiltration measurements. *Soil Sci.* 155 (4): 237-244.
- 5- Brooks R.H., and Corey A.T. 1964. Hydraulic properties of porous media. *Hydrolo. Paper 3*, Colorado State Univ., Fort Collins.
- 6- Gardner W.R. 1958. Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table. *Soil Sci.* 85, 228- 232.
- 7- Hunt A.G. 2004. An explicit derivation of an exponential dependence of the hydraulic conductivity on relative saturation. *Adv. Water. Resour.* 27:197-201.
- 8- Kosugi K., and Hopmans J.W. 1998. Scaling water retention curves for soils with lognormal pore-size distribution. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 62:1496-1504.
- 9- Kutilek M., and Nielsen D.R. 1994. *Soil Hydrology*. Catena, Germany.
- 10- Kutilek M., Zayani K., Haverkamp R., Parlange J.Y., and Vachaud G. 1991. Scaling of Richards' equation under invariant flux boundary conditions. *Water Resour. Res.* 27:2181-2185.
- 11- Miller E.E., and Miller R.D. 1956. Physical theory for capillary flow phenomena. *J. Appl. Phys.* 27:324-332.
- 12- Nasta P., Kamai T., Chirico G.B., Hopmans J.W., and Romano N. 2009. Scaling soil water retention functions using particle-size distribution. *J. Hydrol.* 374:223-234.
- 13- Nielsen D.R., Biggar J.W., and Erh K.T. 1973. Spatial variability of field-measured soil-water properties. *Hilgardia.* 42:215-59.
- 14- Reichardt K., Nielsen D.R., and Biggar J.W. 1972. Scaling of horizontal infiltration into homogeneous soils. *Soil*

- Sci. Soc. Am. J. Proc. 36:241–245.
- 15- Sadeghi M., Ghahraman B., Davary K., Hasheminia S.M., and Reichardt K. 2011. Scaling to generalize a single solution of Richards' equation for soil water redistribution. *Scientia Agricola*. 68(5):582–591.
  - 16- Sadeghi M., Ghahraman B., Ziaei A.N., Davary K., and Reichardt K. 2012a. Additional scaled solutions to Richards' equation for infiltration and drainage. *Soil and Tillage Research* 119:60–69.
  - 17- Sadeghi M., Ghahraman B., Ziaei A.N., Davary K., and Reichardt K. 2012b. Invariant solutions of Richards' equation for water movement in dissimilar soils. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 76:1–9.
  - 18- Simmons C.S., Nielsen D.R., and Biggar J.W. 1979. Scaling of field-measured soil-water properties. *Hilgardia*. 47:77–173.
  - 19- Sposito G., and Jury W.A. 1985. Inspectional analysis in the theory of water flow through unsaturated soils. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 49:791–798.
  - 20- Tuli A., Kosugi K., and Hopmans J.W. 2001. Simultaneous scaling of soil water retention and unsaturated hydraulic conductivity functions assuming lognormal pore-size distribution. *Adv. Water Resour.* 24:677–688.
  - 21- van Genuchten M.T. 1980 A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Science Society of America Journal* 44: 892–898.
  - 22- Vogel T., Cislerova M., and Hopmans J.W. 1991. Porous media with linearly hydraulic properties. *Water Resour. Res.* 27:2735–2741.
  - 23- Warrick A.W., and Amoozegar-Fard A. 1979. Infiltration and drainage calculations using spatially scaled hydraulic properties. *Water Resour. Res.* 15:1116–1120.
  - 24- Warrick A.W., and Hussen A.A. 1993. Scaling of Richards' equation for infiltration and drainage. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 57:15–18.
  - 25- Warrick A.W., and Lomen D.O., Yates S.R. 1985. A generalized solution to infiltration. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 49:34–38.
  - 26- Warrick A.W., Mullen G.J., and Nielsen D.R. 1977. Scaling of field measured hydraulic properties using a similar media concept. *Water Resour. Res.* 13:355–362.

## Approximate Solutions to Richards' Equation for Soil Water Infiltration Using Scaling

M. Sadeghi<sup>1\*</sup> – B. Ghahraman<sup>2</sup> – A.N. Ziaei<sup>3</sup> – K. Davary<sup>4</sup>

Received: 14-11-2012

Accepted: 14-07-2013

### Abstract

After introducing similar media theory, many scaling methods were developed and have been widely used to cope with soil variability problem as well as to achieve invariant solutions of Richards' equation. Recently, a method was developed for scaling Richards' equation (RE) for dissimilar soils such that the scaled RE is independent of soil hydraulic properties for a wide range of soils. This method uses exponential – power hydraulic functions which are restricted to a limited range of soil-water content and matric potential. Hence, this method does not apply to the phenomena in which soil-water content and matric potential exceeds this range. Therefore, this research was performed to extend the method for a wider range of soil-water content and matric potential. This objective was achieved by modifying the exponential – power hydraulic functions and the scaling method was extended to the entire range of soil wetness (from saturated to dry). This study was followed to solve RE for soil-water infiltration using scaling. To do so, numerical solutions of the scaled RE was approximated by a scaled form of Philip three-term equation with soil-independent coefficients. The obtained approximate solution was tested using literature data of infiltration experiments on a sandy and two clayey soils. Results indicated that the solution can reasonably estimate (with the average relative error at most 9% for the cases studied here) measured infiltrated water. Also, it was shown that this solution can accurately approximate (with the average relative error at most 4% for the cases studied here) the numerical solutions of RE (for the same conditions and hydraulic functions). Hence, because of its simplicity, the solution is proposed as an alternative for numerical solutions of RE or other empirical equations for soil-water infiltration. Additionally, this solution can be easily applied to determine soil hydraulic functions by inverse solutions.

**Keywords:** Variability, Similar soils, Dissimilar soils, Exponential – power hydraulic functions

---

1, 2, 3, 4 - PhD Graduated, Professor, Assistant Professor, and Associate Professor, Department of Water Engineering, College of Agriculture, Ferdowsi University of Mashhad, Respectively  
(\* - Corresponding Author Email: m.sadeghi.um@gmail.com)