

تأثیر توأم روش عددی و گام زمانی در محاسبه تبخیر- تعرق واقعی گیاه در شرایط تنش آبی

بیژن قهرمان¹

تاریخ دریافت: 1392/01/20

تاریخ پذیرش: 1394/06/24

چکیده

برای مدل سازی هیدرولوژیکی و مدیریت آب آبیاری، به محاسبه تبخیر- تعرق واقعی گیاه در شرایط تنش نیاز می باشد. تبخیر- تعرق واقعی به برآورد نمایه تنش آبی و رطوبت خاک در ناحیه ریشه بستگی دارد که خود با روش های عددی و گام زمانی استفاده شده تغییر می کند. در بازه های زمانی تخلیه رطوبت خاک که آبیاری یا بارندگی وجود ندارد، تبخیر- تعرق واقعی گیاه را می توان با روش تحلیلی و گونه هایی از روش های عددی محاسبه کرد. ما نتایج چندین روش عددی متداول (اولر صریح، اولر ضمنی، اولر تصحیح شده، نقطه میانی، هون مرتبه سوم) را با نتایج روش تحلیلی به عنوان مبنا مقایسه کردیم. سه نوع بافت خاک کلی سبک، متوسط و سنگین و سه دسته کلی گیاه حساس، متوسط و مقاوم در دشت نیشابور در نظر گرفته شد. نتایج نشان داد که با تداوم تنش در یک گام زمانی، خطاهای نسبی تبخیر- تعرق محاسبه شده با روش های عددی مستقل از رطوبت اولیه خاک است. مقادیر مطلق خطاهای تبخیر- تعرق واقعی گیاه با افزایش گام های زمانی پشت سر هم کاهش می یابد، که می تواند پایداری عددی شبیه سازی متوالی بیلان آب خاک را تضمین کند. از نقطه نظر کاربردی برای کلیه ترکیبات نوع خاک و گیاه، روش اولر ضمنی به دلیل استواری در نتایج و روش هون مرتبه سوم به دلیل حداکثر خطای نسبی کم تر پیشنهاد می شود.

واژه های کلیدی: بیلان آب خاک، پایداری روش های عددی، تخلیه رطوبت خاک، نمایه تنش آبی

مقدمه

غیراشباع، $E_t a$ را از روی تبخیر- تعرق پتانسیل ($E_t p$) و با استفاده از توابع تنش، داده های اقلیمی، توابع هیدرولیکی خاک، ضرایب گیاهی و نمایه سطح برگ (LAI) برآورد کردند.

یکی از شیوه های ارزیابی تنش آبی، استفاده از نسبت تبخیر- تعرق واقعی به پتانسیل است که در این جا از آن با نام نمایه تنش آبی (WSI) یاد خواهد شد. این نمایه عمدتاً به ویژگی های خاک و الگوی خیس شدن آن بستگی داشته و بیشینه نیاز آبی گیاه بر آن تأثیر گذار است. این نمایه به طور مشخص از مقدار رطوبت خاک در ناحیه ریشه پیروی کرده و مقدار آن بین صفر (هنگامی که این رطوبت کم تر از رطوبت پژمردگی، W_p ، باشد) و یک (هنگامی که از مقدار آستانه ای برای تنش آبی، W_j ، بیش تر باشد) تغییر می کند. با افزایش رطوبت خاک از W_p به W_j ، مقدار WSI از صفر به سمت یک افزایش یافته و می توان آن را با چندین رابطه تجربی محاسبه کرد. استفاده از مقدار رطوبت خاک و توابع لگاریتمی (7) یا نمایی (11) یا مکش خاک با تابع سیگموئیدی (10) چند نمونه به شمار می آید. در برخی از روابط به تأثیر بیشینه نیاز آبی گیاه نیز پرداخته شده است (مثلاً آن و همکاران، 1).

پس از انتخاب رابطه تجربی مناسب برای محاسبه WSI، مقدار تبخیر- تعرق واقعی گیاه و نیز بیلان آب خاک در گام های

در مناطقی با بارندگی کم و تأمین آب محدود، گیاهان با تنش آبی مواجه شده که رشد و تولید آن ها را تحت تأثیر قرار می دهد. در چنین شرایطی برای دستیابی به بیلان آب خاک، محاسبه تبخیر- تعرق واقعی ($E_t a$) تعیین کننده بوده و برای مدیریت آب آبیاری مهم می باشد. در مدل های هیدرولوژیکی به نحو گسترده از $E_t a$ استفاده می شود. در این مدل ها به طور متداول به $E_t a$ در سه سطح مزرعه، حوضه آبریز، و سنجش از دور توجه می شود (8). نگرش بیلان آب خاک در بسیاری از شرایط گزینه ای مناسب قلمداد می شود. برای مثال آناندیل و همکاران (2) از بیلان آب خاک یک- بعدی در مقیاس مزرعه و ژنگ و همکاران (16) از مدلی نیمه تجربی برپایه بیلان در سطح حوضه آبریز استفاده کردند. معادله ریچاردز گزینه ای دیگری برای پرداختن به $E_t a$ می باشد. برای مثال سزانلی و گورراچینو (3) مفهوم برآورد $E_t a$ توسط مدل سازی عددی حرکت آب در ناحیه ی غیراشباع را ارزیابی کرده و سپس سزانلی و گورراچینو (4) با استفاده از روش عددی برپایه شبیه سازی جریان آب و رشد گیاه در ناحیه ی

1- استاد گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه فردوسی مشهد
Email: bijangh@um.ac.ir

به‌طور نمایی با کاهش رطوبت خاک کاهش یافته و لذا شار رو به پایین عملاً ناچیز خواهد بود) چشم‌پوشی می‌شود. در نتیجه نرخ کاهش آب در ناحیه‌ی ریشه با رابطه‌ی ناحیه‌ی ریشه و با بعد m . در متر در زمان t ET_a و ET_c به‌ترتیب تبخیر - تعرق واقعی و پتانسیل، که حاصل ضرب ضریب گیاهی K_c و تبخیر - تعرق گیاه مرجع ET_o است، و K_s نمایه‌ی تنش آبی WSI می‌باشد). K_s از رطوبت خاک و ET_c پیروی کرده و گمان می‌شود (1) که تغییرات آن به‌طور خطی بین صفر (در رطوبت پژمردگی - W_p) و یک (در رطوبت بحرانی - W_j) و به صورت $K_s = (W - W_p) / (W_j - W_p)$ باشد، در حالی که مقدار آن برای رطوبت های کم تر از W_p و بیش تر از رطوبت بحرانی W_j به ترتیب برابر با صفر و یک می باشد. رطوبت خاک در مزرعه به‌ندرت از W_p کم تر می‌شود بنابراین در این پژوهش نیز تأکید بر رطوبت‌های بین W_p و W_j می‌باشد. رطوبت W_j در جایی بین W_p و رطوبت مزرعه‌ای W_f بوده و میانگین وزنی این دو مقدار به صورت $W_j = pW_p + (1 - p)W_f$ (یعنی $0 < p < 1$) که پیش از بروز تنش می‌تواند از خاک تخلیه شود و مقدار آن با رابطه‌ی $p = p_{std} + 0.045(5 - ET_c)$ بیان شده و به گونه‌ی گیاه و ET_c بستگی دارد به طوری که p_{std} برای هر گیاه آن مقداری از p است به‌گونه‌ای که $ET_c \approx 5mm/d$ باشد (1).

با اعمال رابطه‌ی خطی $K_s:W$ در رابطه‌ی نرخ کاهش آب در ناحیه‌ی ریشه داریم:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{W - W_p}{W_j - W_p} ET_c, W_p < W < W_j \quad (1)$$

چنانچه مقدار ET_c در بازه‌ی زمانی مورد نظر تغییراتی اندک داشته و بتوان آن را مقداری ثابت دانست، آن‌گاه حل تحلیلی رابطه‌ی بالا برای رطوبت خاک منجر به رابطه‌ی نزولی به‌عنوان تابعی از زمان می‌شود (رطوبت اولیه‌ی خاک در زمان $t=0$ برابر با W_0 است):

$$W(t) = W_p + (W_0 - W_p) \exp\left[-\frac{ET_c \Delta t}{(W_j - W_p)}\right] \quad (2)$$

که در آن ET_c میانگین مقدار ET_c در بازه‌ی زمانی $[0, t]$ می‌باشد. در این صورت تبخیر - تعرق واقعی در بازه‌ی زمانی $[0, \Delta t]$ را این‌گونه به‌دست می‌آوریم:

$$ET_a = W_0 - W(\Delta t) = (W_0 - W_p) \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{ET_c \Delta t}{(W_j - W_p)}\right] \right\} \quad (3)$$

نتایج حل تحلیلی را مبنایی برای بررسی روش‌های حل عددی می‌انگاریم.

متوالی شبیه‌سازی می‌شود. آشکار است که مقدار رطوبت خاک در خلال گام زمانی تغییر می‌کند، از این‌رو چگونگی انتخاب آن در گام زمانی پرسشی چالش‌برانگیز است. برای گام‌های زمانی کوتاه، مثلاً روزانه، تغییرات رطوبت خاک اندک بوده و می‌توان برای محاسبه‌ی WSI از رطوبت اولیه‌ی خاک سود جست (15). در مقابل و در شرایط اجرایی، غالباً از گام‌های زمانی طولانی‌تر (هفته، 10-روزه، یا حتی فصل رشد) استفاده می‌شود (12). در چنین شرایطی تغییرات رطوبت خاک در خلال گام زمانی ناچیز نبوده و باید به مقوله‌هایی همچون دقت و پایداری عددی در محاسبات (برای مثال هیگام، 6)، نیز توجه شود. در نتیجه، انتخاب روش عددی مناسب و انتخاب گام زمانی مناسب بر دقت نتایج تأثیر دارد.

سنگ (14) تبخیر-تعرق واقعی گیاه را تحت شرایط تنش رطوبتی خاک با روش‌های عددی (شامل اولر صریح، اولر ضمنی، اولر اصلاح شده، هون مرتبه‌ی سوم) و گام زمانی مختلف 1 روز تا 10 روز محاسبه و نتایج عددی را با روش حل تحلیلی به‌عنوان مبنا مقایسه کرد. نامبرده سپس روش‌های عددی مناسب برای گام‌های زمانی مختلف و شدت‌های حداکثر تبخیر-تعرق گیاه (1 تا 9 میلی‌متر در روز) را پیشنهاد کرد. منطقه‌ی مورد مطالعه‌ی سنگ (14) در ناحیه‌ی آبیاری ژیاثو در مرکز استان شانجی واقع در شمال چین بود. اقلیم منطقه نیمه-خشک به همراه با مانسون‌های قاره‌ای و با متوسط باران سالانه‌ی 450 م.م. (میلی‌متر) بود. خاک منطقه لوم سنگین با چگالی ظاهری $1/43 \text{ g/cm}^3$ و رطوبت زراعی و نقطه‌ی پژمردگی به ترتیب 396 و 158 م.م. در متر خاک بود. وی تنها به دو محصول گندم و ذرت توجه کرد (حد مجاز تخلیه‌ی رطوبتی با پارامتر p_{std} برابر با 0/55-نقل از آلن و همکاران، 1). بنابراین تمامی نتایج به‌دست آمده تحت تاثیر متقابل نوع خاک (که بر W_p و W_j موثر است) و نوع گیاه (که بر p_{std} موثر است) خواهد بود. در نتیجه تمامی نتیجه‌گیری‌های نامبرده صرفاً محلی و موضعی تلقی شده و نمی‌توان هیچ نتیجه‌گیری دیگری از یافته‌های نامبرده انجام داد. هدف این مقاله، بسط نتایج سنگ (14) به ترکیبات متفاوتی از بافت خاک (از شن تا رس) و گیاهان مختلف (p_{std} از حداقل 0/2 تا حداکثر 0/7) است. تا بتوان حساسیت نتایج (انتخاب توأم روش عددی و گام زمانی مناسب) را به شرایط محیطی ایستا (بافت خاک) و پویا (نوع گیاه) ارزیابی کرد.

مواد و روش‌ها

نگرشی مفهومی برای محاسبه‌ی تبخیر - تعرق واقعی

رطوبت خاک در ناحیه‌ی ریشه در دوره‌های زمانی بدون آبیاری و/یا بدون بارندگی عمدتاً به‌دلیل تبخیر - تعرق گیاه کاهش می‌یابد. از نفوذ عمقی در بسیاری از شرایط (مثلاً به‌دلیل پایین بودن سفره‌ی آب زیرزمینی و اعمال کم‌آبیاری زیرا هدایت هیدرولیکی خاک غیراشباع

$$ET_{me} = \frac{1}{2} \left(\frac{W_0 - W_p}{W_j - W_p} + \frac{W' - W_p}{W_j - W_p} \right) \overline{ET_c} \Delta t \quad (9)$$

$$= \frac{W_0 - W_p}{W_j - W_p} \overline{ET_c} \Delta t \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\overline{ET_c} \Delta t}{W_j - W_p} \right)$$

بنابراین روابط مربوط برای روش‌های اولر تصحیح شده و نقطه‌ی میانی یکسان است که ناشی از فرض تغییر خطی در رابطه‌ی بین نمایه‌ی تنش و رطوبت است. اگر از رابطه‌ی غیرخطی استفاده شود، این روابط نیز متفاوت خواهند بود.

(پنج) در روش هون مرتبه‌ی سوم، رطوبت در پایان بازه‌ی زمانی با $W_1 = W_0 + (H_1 + 3H_3)\Delta t/4$ تقریب زده می‌شود که در آن

$$H_1 = - \frac{W_0 - W_p}{W_j - W_p} \overline{ET_c} \Delta t$$

$$H_2 = - \frac{W_0 + H_1 \overline{ET_c} \Delta t / 3 - W_p}{W_j - W_p} \overline{ET_c} \Delta t$$

$$H_3 = - \frac{W_0 + 2H_2 \overline{ET_c} \Delta t / 3 - W_p}{W_j - W_p} \overline{ET_c} \Delta t$$

رطوبت پایانی بازه‌ی زمانی $[0, \Delta t]$ و تبخیر - تعرق واقعی در خلال آن برابر به ترتیب خواهد بود با:

$$W_1 = W_0 - \frac{W_0 - W_p}{W_j - W_p} \overline{ET_c} \Delta t \times \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\overline{ET_c} \Delta t}{W_j - W_p} + \frac{1}{6} \left(\frac{\overline{ET_c} \Delta t}{W_j - W_p} \right)^2 \right] \quad (10)$$

$$ET_{H3} = \frac{W_0 - W_p}{W_j - W_p} \overline{ET_c} \Delta t \times \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\overline{ET_c} \Delta t}{W_j - W_p} + \frac{1}{6} \left(\frac{\overline{ET_c} \Delta t}{W_j - W_p} \right)^2 \right] \quad (11)$$

رابطه‌ی بین گسترش سری تیلور رابطه‌ی 7 و نتایج روش‌های عددی

گسترش سری تیلور، هر تابع پیچیده را با چند جمله‌ای‌های تیلور با درجه‌های متفاوت تقریب می‌زند. گسترش سری تیلور برای تابع $\exp(u)$ با $\exp(u) = 1 + u + u^2/2! + u^3/3! + u^4/4! + \dots$ داده می‌شود. بنابراین تقریب رابطه‌ی 3 این گونه می‌شود:

$$ET_f = \frac{W_0 - W_p}{W_j - W_p} \overline{ET_c} \Delta t \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\overline{ET_c} \Delta t}{W_j - W_p} + \frac{1}{6} \left(\frac{\overline{ET_c} \Delta t}{W_j - W_p} \right)^2 - \frac{1}{24} \left(\frac{\overline{ET_c} \Delta t}{W_j - W_p} \right)^3 + \dots \right] \quad (12)$$

محاسبه‌ی تبخیر - تعرق واقعی با استفاده از روش‌های عددی

چندین روش حل عددی وجود دارد (اولر صریح، اولر ضمنی، اولر تصحیح شده، نقطه‌ی میانی، هون مرتبه‌ی سوم) که می‌توان آن‌ها را برای حل معادله‌ی دیفرانسیل رابطه‌ی 1 به کار برد تا تبخیر - تعرق واقعی گیاه در بازه‌ی زمانی معین به دست آید (مثلاً چپرا و کنیل، 5، را ببینید).

(یک) در روش اولر صریح از رطوبت اولیه‌ی خاک در بازه‌ی زمانی استفاده می‌شود و کاربردی گسترده در بازه‌های زمانی روزانه یا کم‌تر دارد (15). در این صورت تبخیر - تعرق واقعی در بازه‌ی زمانی $[0, \Delta t]$ می‌شود:

$$ET_{ee} = \frac{W_0 - W_p}{W_j - W_p} \overline{ET_c} \Delta t \quad (4)$$

(دو) در روش اولر ضمنی از رطوبت پایانی خاک در بازه‌ی زمانی استفاده می‌شود. اگر تبخیر - تعرق واقعی در بازه‌ی زمانی $[0, \Delta t]$ برابر با ET_{ie} باشد، آن گاه رطوبت پایانی $W_0 - ET_{ie}$ بوده و در نتیجه ET_{ie} این گونه محاسبه می‌شود:

$$ET_{ie} = \frac{(W_0 - ET_{ie}) - W_p}{W_j - W_p} \overline{ET_c} \Delta t \quad (5)$$

$$= \frac{W_0 - W_p}{W_j - W_p + \overline{ET_c} \Delta t} \overline{ET_c} \Delta t$$

(سه) در روش نقطه‌ی میانی، از رطوبت خاک در میانه‌ی بازه‌ی زمانی و پس از آن برای محاسبه‌ی تبخیر - تعرق واقعی از روش صریح استفاده می‌شود. در نتیجه،

$$W_{1/2} = W_0 - \frac{1}{2} ET_{ee} \quad (6)$$

$$= W_0 - \frac{1}{2} \frac{W_0 - W_p}{W_j - W_p} \overline{ET_c} \Delta t$$

$$ET_{mp} = \frac{W_{1/2} - W_p}{W_j - W_p} \overline{ET_c} \Delta t \quad (7)$$

$$= \frac{W_0 - W_p}{W_j - W_p} \overline{ET_c} \Delta t \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\overline{ET_c} \Delta t}{W_j - W_p} \right)$$

(چهار) در روش اولر تصحیح شده، از میانگین نمایه‌ی تنش متناظر با رطوبت‌های اولیه و پایانی (W' - به دست آمده از روش صریح) در بازه‌ی زمانی $[0, \Delta t]$ استفاده می‌شود. در نتیجه داریم:

$$W' = W_0 - ET_{ee} \quad (8)$$

$$= W_0 - \frac{W_0 - W_p}{W_j - W_p} \overline{ET_c} \Delta t$$

حداکثر مطلق تبخیر-تعرق گیاه مرجع در منطقه 11/61 م.م. در روز می باشد (9). بنابراین برای ET_c بازه‌های بین 1 تا 12 م.م. در روز لحاظ گردید.

نتایج و بحث

تأثیر ET_c و W_0 بر روی ET_a

ET_a عمدتاً به عوامل هواشناسی، گیاهی و خاک بستگی دارد در حالی که ET_c حاصل ترکیب توأم عوامل هواشناسی و گیاهی بوده و کران بالای ET_a محسوب می‌شود. در شرایط بدون تنش، ET_a با ET_c برابر بوده و بنابراین با افزایش آن به‌طور خطی افزایش می‌یابد. از سوی دیگر، ET_c نیز عاملی مهم است که به مرحله‌ی رشدی گیاه در هنگام تنش مربوط شده و بر روی مقدار آب قابل دسترس (W_f) تأثیر می‌گذارد. در صورت شکل‌گیری تنش، افزایش ET_a با افزایش ET_c خطی نبوده بلکه از آن کم‌تر است (روابط 3 و 12 را ببینید). شکل 1 برای شفاف‌سازی بیش‌تر آماده شد. این شکل تبخیر-تعرق واقعی 10 روزه را برای مقادیر متفاوتی از ET_c (محور افقی) و W_0 (خطوط مشخص شده که نسبت به دو عامل رطوبت زراعی و نقطه‌ی پژمردگی مقیاس شده‌اند) را برای خاک‌های با بافت مختلف و گیاهان مختلف که با استفاده از رابطه‌ی 3 محاسبه شده است نشان می‌دهد. وجود گودی به سمت پایین (رابطه‌ی فرو-خطی) در هر زیرشکل، نتیجه‌ی تقابل تأثیرات ET_c و تنش رطوبتی می‌باشد؛ ET_c بیش‌تر منجر به ET_a بیش‌تر و کاهش شدیدتر رطوبت خاک شده که منجر به افزایش درجه‌ی تنش می‌شود، در نتیجه کاهش ET_a را شدیدتر خواهد کرد (هم‌چنین شکل 1 در سنگ، 14، را ببینید). از شکل 1 می‌توان تأثیر متقابل نوع خاک و حساسیت گیاه به کم‌آبی (مستتر در عامل p_{std}) را بررسی کرد. از یک طرف برای گیاهان حساس‌تر (ردیف‌های وسط و بالا) وابستگی ET_a به ET_c افزایش می‌یابد. از طرف دیگر در خاک‌های سنگین بافت‌تر (ستون‌های وسط و راست)، تبخیر-تعرق واقعی نسبی (توجه کنید که مقادیر W_0 در زیرشکل‌ها یکسان نبوده بلکه نسبت به دو عامل W_p و W_f مقیاس شده‌اند) بیش‌تر می‌شود.

رژیم آب خاک عامل مهم دیگری است که بر ET_a تأثیر می‌گذارد. از آن‌جا که گمان می‌رود رابطه‌ی بین تنش رطوبتی و رطوبت خاک در ناحیه‌ی ریشه‌ی گیاه در صورت تداوم تنش به‌صورت خطی باشد (رابطه‌ی 2؛ آلن و همکاران، 1)، افزایش ET_a با افزایش W_0 نیز خطی خواهد بود (شکل 1). جدای از رفتار منطقی منحنی‌ها، برخی ترکیبات ET_c و W_0 در واقع به‌گونه‌ای است که باعث می‌شود W_0 خارج از دامنه‌ی از پیش فرض شده‌ی $W_p < W_0 < W_f$ واقع شده و به بیان دیگر در دامنه‌ی $W > W_f$ قرار می‌گیرد.

نتایج ET_T به ازای مقادیر 1، 2 و 3 برای T ، به‌ترتیب به روش اولر صریح، نقطه‌ی میانی و هون مرتبه‌ی سوم تبدیل می‌شود. روش‌های عددی مرتبه‌ی بالاتر که به‌گونه‌هایی از رانگ-کوتا تبدیل می‌شوند، در این‌جا بررسی نشده‌اند.

منطقه‌ی مورد مطالعه و داده‌ها

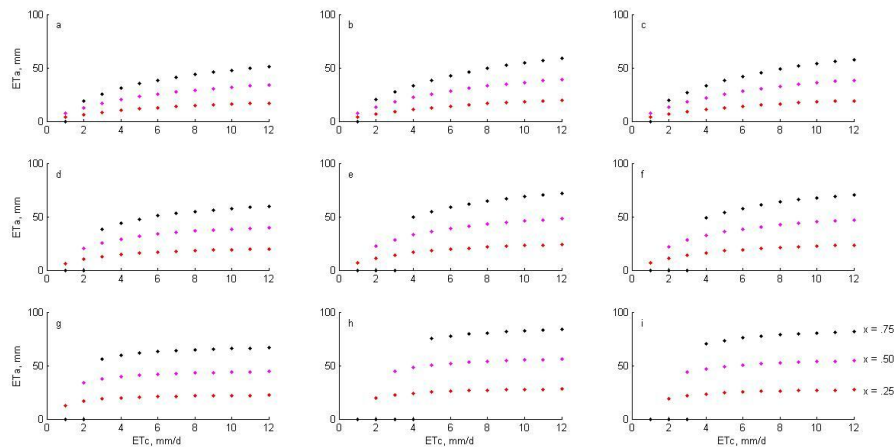
از اطلاعات دشت نیشابور به مساحت حدود 9350 کیلومتر مربع در استان خراسان رضوی استفاده شد. میانگین کل بارندگی در دشت در حدود 267 م.م. (میلی‌متر) در سال و متوسط تبخیر-تعرق گیاه مرجع در آن در حدود 400 م.م. است. گیاهان متفاوتی در این دشت کاشت می‌شود. تأثیر گیاهان مختلف بر روی میزان آب در دسترس پیش از بروز تنش است که با عدد p_{std} (متناظر با ET_c برابر با 5 م.م. در روز) بیان می‌شود. به این صورت که هرچه گیاه حساس‌تر بوده و ریشه‌ی آن سطحی‌تر باشد مقدار p_{std} برای آن کوچک‌تر خواهد بود. گیاهان عمده‌ی دشت نیشابور شامل گندم ($p_{std}=0.55$)، جو ($p_{std}=0.55$)، پنبه ($p_{std}=0.65$)، یونجه ($p_{std}=0.55-0.60$)، زعفران (مقداری برای p_{std} آن گزارش نشده است، با قضاوت کارشناسی مقدار 0.35 برای آن در نظر گرفته شد)، گوجه فرنگی ($p_{std}=0.40$)، چغندرقد ($p_{std}=0.55$) و حبوبات ($p_{std}=0.35-0.50$) می‌باشد. با رعایت اطمینان، این اعداد را در سه مقدار 0.30 (نماینده‌ی برای گیاهان حساس)، 0.50 (نماینده‌ی برای گیاهان متوسط) و 0.70 (نماینده‌ی برای گیاهان مقاوم) خلاصه کردیم تا نتایج مقاله برای شرایط گسترده‌تری شمول داشته باشد. با این‌حال این دامنه گیاهانی همچون برنج، کرفس و توت فرنگی (با $p_{std}=0.20$) و کنف (با $p_{std}=0.80$) را دربر نمی‌گیرد. با چشم‌پوشی از گیاه کنف، احتمال کاشت برنج و توت فرنگی نامحتمل نمی‌باشد. بنابراین کران پایین p_{std} را به 0.20 کاهش دادیم.

چهل و دو (42) واحد ارضی در دشت نیشابور وجود دارد که ویژگی‌های فیزیکی خاک آن‌ها توسط شفیع (13) گزارش شده است. از این اطلاعات، هشت کلاس بافتی متمایز لوم رسی، لوم، شن لومی، شن، لوم رسی شنی، لوم شنی، لوم لای‌دار و رس لای‌دار استخراج و جهت کاربردی بودن مقاله، در سه دسته‌ی کلی خاک‌های سبک (26% از اراضی)، متوسط (50%) و سنگین (24%) تجمیع گردیدند. مشخصات مورد نیاز از این سه دسته در جدول 1 ارائه شده است. به این ترتیب در مقابل سنگ (14) که تنها به یک حالت (ترکیب بافت خاک سنگین و $p_{std}=0.55$) پرداخت، ما در این‌جا 9 حالت (سه دسته خاک و 3 مقدار برای p_{std} نماینده‌ی 3 نوع گیاه مختلف) را مدنظر قرار دادیم.

با توجه به شیوه‌های مختلف آبیاری در منطقه (ترکیبی از آبیاری سطحی و تحت فشار) از بازه‌ی زمانی 1 تا 10 روز استفاده شد.

جدول 1- برخی از خصوصیات مورد نیاز خاک های دشت نیشابور
Table 1- Some of the necessary features of Nishaboer plain

نوع خاک Soil type	رطوبت اشباع، Saturated moisture mm.m ⁻¹	W _f , mm.m ⁻¹	W _p , mm.m ⁻¹	چگالی، Bulk density g.cm ⁻³	هدایت هیدرولیکی اشباع، Saturated hydraulic conductivity cm/d
سبک Sandy	358	179	77	1/617	20/72
متوسط Medium	366	232	83	1/548	7/64
سنگین Heavy لوم سنگین (سنگ، 14) Heavy loam (Shang, 14)	408	266	124	1/521	5/5
		396	158	1/43	



شکل 1- تبخیر - تعرق واقعی (ET_a) 10-روزه به عنوان تابعی از بیشینه تبخیر - تعرق (ET_c) و رطوبت اولیه خاک ($W_0=W_p+x[W_f-W_p]$). زیرشکل های a,b,c مربوط به گیاهان حساس ($p_{std}=.2$)، زیرشکل های d,e,f مربوط به گیاهان متوسط ($p_{std}=.5$) و زیرشکل های g,h,i مربوط به گیاهان مقاوم ($p_{std}=.7$) است. زیرشکل های a,d,g مربوط به خاک با بافت سبک، زیرشکل های b,e,h مربوط به خاک با بافت متوسط و زیرشکل های c,f,i مربوط به خاک با بافت سنگین است.

Figure 1- 10-day actual evapotranspiration (ET_a) as a function of maximum evapotranspiration (ET_c) and initial soil moisture content ($W_0=W_p+x[W_f-W_p]$). Sensitive crops ($p_{std}=.2$) are shown in subplots a,b,c, moderate crops ($p_{std}=.5$) in subplots d,e,f, and resistance crops ($p_{std}=.7$) in subplots g,h,i. Sandy soils are shown in subplots a,d,g, medium soils in subplots b,e,h, and heavy soils in subplots c,f,i.

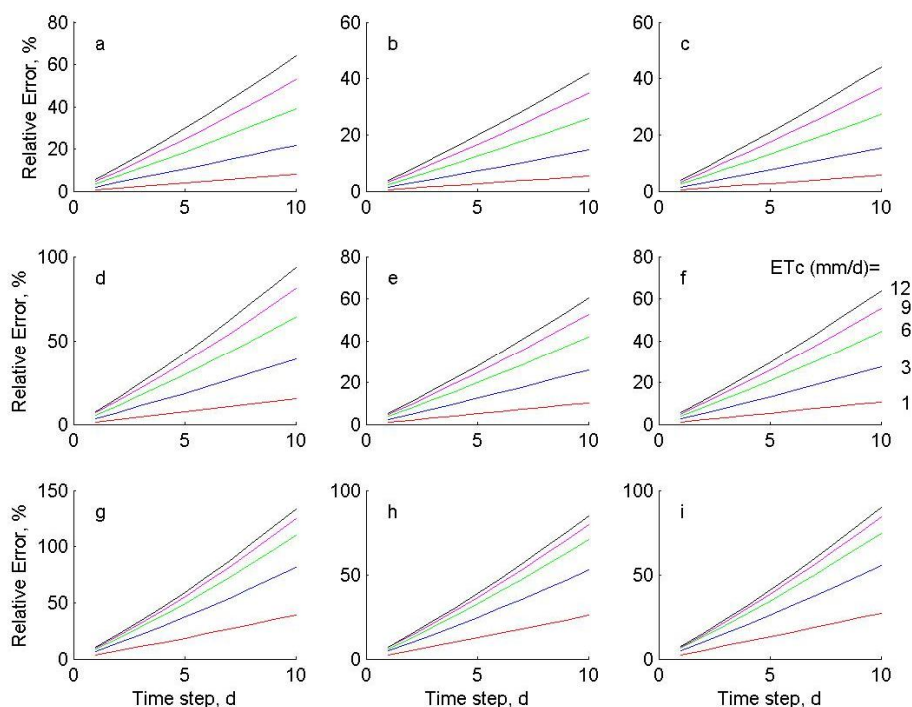
خطاهای ناشی از حل عددی

برای محاسبه تبخیر - تعرق واقعی در بازه‌ی زمانی معین، از چندین روش حل عددی شامل اولر صریح (رابطه‌ی 4)، اولر ضمنی (رابطه‌ی 5)، نقطه‌ی میانی (رابطه‌ی 7)، اولر تصحیح شده (رابطه‌ی 9) و هون مرتبه‌ی سوم (رابطه‌ی 11) سود جستیم. حل تحلیلی (رابطه‌ی 3) مبنایی برای ارزیابی روش‌های عددی انگاشته شد.

از این رو نقاط مربوط به چنین ترکیباتی در شکل 1 نشان داده نشده و منحنی‌های مربوطه به شکل ناقص ترسیم شده‌اند. وجود چنین نقاطی با کاهش ET_c و افزایش W₀ افزایش می‌یابد. این نقاط با افزایش p_{std} (برای مثال از 0/5 به 0/7) نیز افزایش می‌یابند. این نکته در شکل 1 در سنگ (14) نیز به چشم می‌خورد گرچه وی هیچ توضیحی برای آن نداده است.

خاکها W_p (جدول 1 را ببینید) و p_{std} قدری با هم متفاوت (شنگ از مقدار 0/55 و ما از سه مقدار متفاوت 0/2، 0/5 و 0/7 استفاده کردیم؛ عدد 0/5 به انتخاب 0/55 نزدیک تر است). گرچه رفتار خطای نسبی با دو عامل گام زمانی و ET_c در روش عددی اولر ضمنی کاملاً خطی است (شکل 2 برای تمامی ترکیبات بافت خاک و نوع گیاه و شکل 2 در شنگ، 14، برای بافت لوم سنگین و گیاه با حساسیت متوسط)، در سه روش دیگر این رفتار نمایایی است (مثلاً شکل 2 شنگ، 14، و شکل‌های 3 تا 5 را ببینید). خطای نسبی در دو روش اولر صریح و هون مرتبه‌ی سوم با دو عامل گام زمانی و ET_c افزایشی و برای دو روش دیگر (اولر ضمنی و اولر تصحیح شده) کاهش‌ی است. یک دلیل محتمل برای افزایشی (کاهش‌ی) بودن خطا در روش اولر صریح (ضمنی) استفاده از رطوبت در ابتدای (انتهای) گام زمانی است. تاثیر ترکیب نوع بافت خاک و نوع گیاه بر روی خطای نسبی کاملاً نظام‌مند است: مقدار خطا با سبک بافت شدن خاک و/یا افزایش حساسیت گیاه افزایش می‌یابد. سبک بافت شدن خاک را ممکن است به امکان کم شدن آب آسان-یافت برای گیاه و حساسیت بالای گیاه به اجازه کم شدن بیش‌تر رطوبت تفسیر کرد.

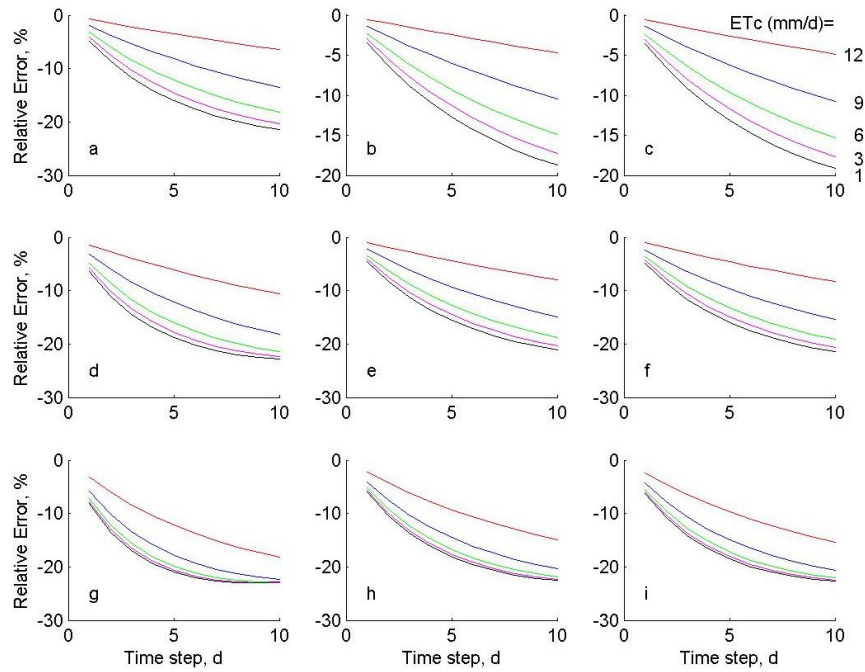
همان‌گونه که در مورد روابط محاسبه‌ی ET_a نیز بیان شد، ET_a در هر گام زمانی متناسب با رطوبت اولیه‌ی در دسترس خاک در ناحیه‌ی ریشه ($W_0 - W_p$) است. بنابراین با تداوم تنش خطاهای نسبی ناشی از به‌کارگیری روش‌های عددی گوناگون برای محاسبه‌ی ET_a در هر گام زمانی، مستقل از رطوبت اولیه‌ی خاک می‌باشد. تغییرات خطای نسبی برای هر مقداری از گام زمانی (از 1 تا 10 روز) و هر مقداری از ET_c (از 1 تا 12 م.م. در روز) و نیز برای سه نوع بافت خاک و سه نوع گیاه با حساسیت‌های مختلف محاسبه شد. نتایج مربوط به روش اولر صریح در شکل 2 نشان داده شده است. بر مبنای این شکل، با افزایش گام زمانی و/یا با افزایش ET_c ، خطای نسبی افزایش می‌یابد. چنین رفتاری برای هر ترکیبی از بافت خاک و نوع گیاه انتخابی درست است. تمامی روش‌های عددی این رفتار را تایید می‌کند (شکل‌های 2 تا 5)، گرچه برای برخی از روش‌ها خطای نسبی منفی است (مثلاً اولر ضمنی و هون مرتبه‌ی سوم). تمامی نتایج تنها به 4 عامل نوع خاک (شامل ویژگی‌های رطوبت مزرعه‌ای و رطوبت پژمردگی)، نوع گیاه (با عامل p_{std})، گام زمانی و ET_c وابسته است. نتایج ما تا حدی با نتایج شنگ (14) قابل مقایسه است گرچه W_f و



شکل 2- خطای نسبی ET_a محاسبه شده به روش اولر صریح به عنوان تابعی از گام زمانی (محور افق: از 1 تا 10 روز) و ET_c .

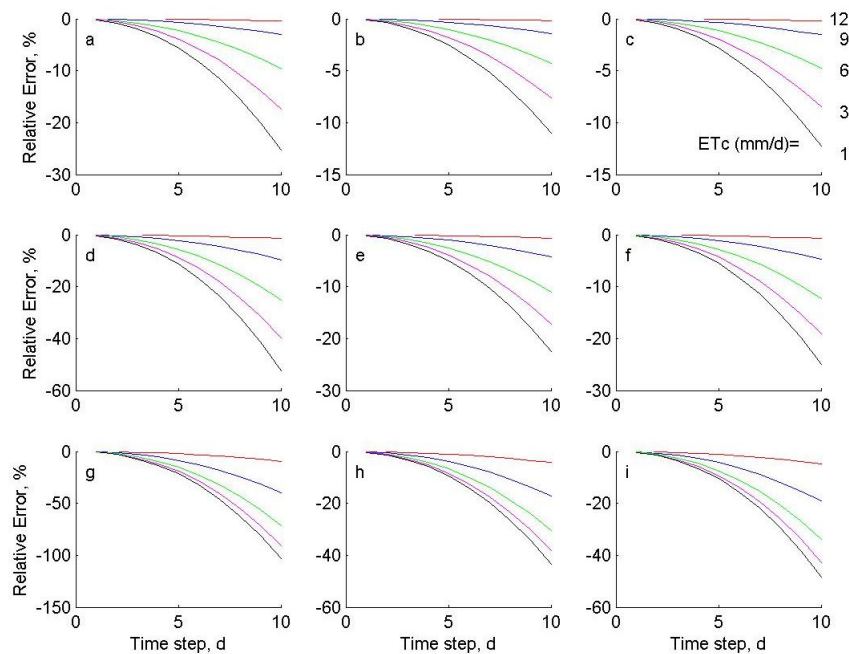
ترتیب زیرشکل‌ها مطابق شکل شماره‌ی 1 است.

Figure 2- Relative error in ET_a computed by explicit Euler as a function of time step (in horizontal axis, from 1 to 10 days) and ET_c . The order of subplots is as shown in Fig. 1.



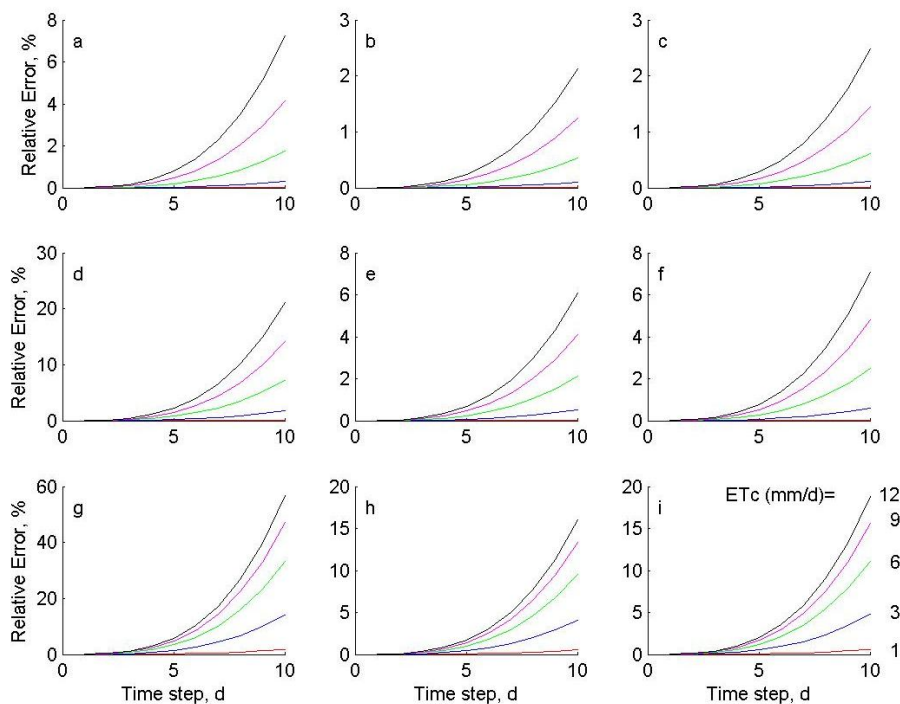
شکل 3- خطای نسبی ET_a محاسبه شده به روش اولر ضمنی به عنوان تابعی از گام زمانی (محور افقی؛ از 1 تا 10 روز) و ET_c . ترتیب زیرشکل ها مطابق شکل شماره 1 است.

Figure 3- Relative error in ET_a computed by implicit Euler as a function of time step (in horizontal axis, from 1 to 10 days) and ET_c . The order of subplots is as shown in Fig. 1.



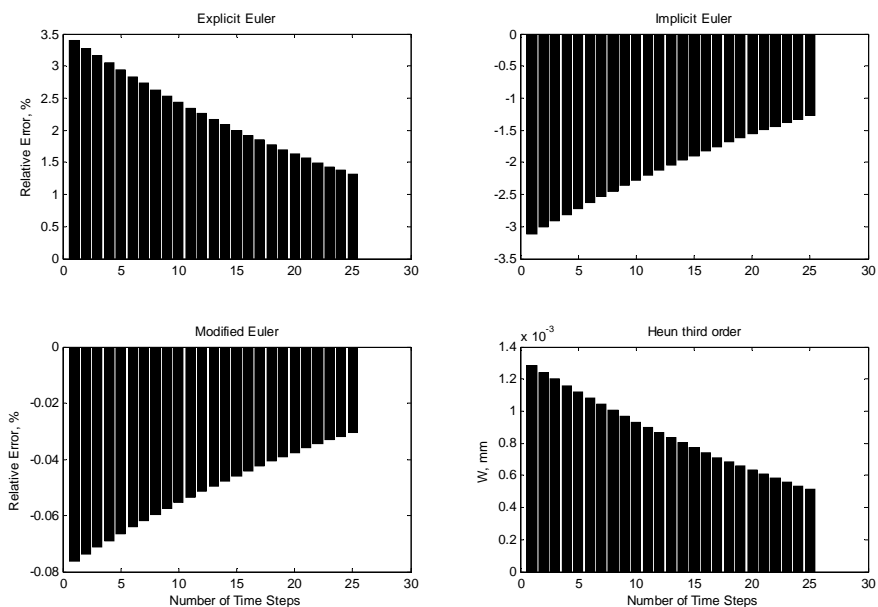
شکل 4- خطای نسبی ET_a محاسبه شده به روش اولر اصلاح شده به عنوان تابعی از گام زمانی (محور افقی؛ از 1 تا 10 روز) و ET_c . ترتیب زیرشکل ها مطابق شکل شماره 1 است.

Figure 4- Relative error in ET_a computed by modified Euler as a function of time step (in horizontal axis, from 1 to 10 days) and ET_c . The order of subplots is as shown in Fig. 1.



شکل 5- خطای نسبی ET_a محاسبه شده به روش هون مرتبه سوم به عنوان تابعی از گام زمانی (محور افقی؛ از 1 تا 10 روز) و ET_c . ترتیب زیرشکل ها مطابق شکل شماره 1 است.

Figure 5- Relative error in Et_a computed by 3-rd order Heun as a function of time step (in horizontal axis, from 1 to 10 days) and ET_c . The order of subplots is as shown in Fig. 1.



شکل 6- تغییرات خطای نسبی ET_a تجمعی با چهار روش مختلف عددی برای خاک متوسط و گیاه با حساسیت متوسط ($ET_c=5 \text{ mm.d}^{-1}$, $\Delta t=1 \text{ d}$)

Figure 6. Variation of accumulated relative error in Et_a for a medium soil with moderate sensitivity ($ET_c=5 \text{ mm.d}^{-1}$, $\Delta t=1 \text{ d}$) which is computed by four different methods

متوالی انجام می‌شود، از این رو بررسی تغییرات خطاهای تجمعی با توالی گام‌های زمانی ثابت نیز مهم است. برای بررسی این موضوع از بین نه (9) ترکیب خاک و گیاه تنها خاک متوسط و گیاه با حساسیت متوسط را در نظر گرفته و خطاهای نسبی ET_a تجمعی محاسبه شده با چهار روش عددی ($ET_p=5 \text{ mm.d}^{-1}$ و $W_0=W_j$ و $\Delta t=1 \text{ d}$) در روزهای متوالی را در شکل 6 نشان دادیم (روند تغییرات برای بقیه‌ی ترکیبات خاک و گیاه یکسان و تنها در مقادیر خطای نسبی متفاوت بود). در تایید شکل‌های 2 و 5، خطا در روش‌های اولر صریح و هون مرتبه‌ی سوم بیش‌برآورد و برای دو روش دیگر کم‌برآورد (متناظر با شکل‌های 3 و 4) داشت. ولی با افزایش تعداد گام زمانی از مقدار خطا به تدریج کاسته می‌شود. شکل 3 مقاله‌ی شنگ (14) که تنها برای روش اولر صریح است با این بخش هماهنگی دارد. این پدیده منجر به پایداری عددی شبیه‌سازی متوالی بیلان آب خاک می‌شود. با این حال باید به نکته توجه شود که افزایش گام‌های زمانی تا جایی مجاز است که رطوبت خاک در بازه‌ی منطقی W_j تا W_p باقی بماند (رطوبت در پایان هر گام زمانی برابر است با رطوبت اول آن گام منهای ET_a در آن گام؛ که تمامی پارامترهای برای هر روش با روش دیگر متفاوت است).

نتیجه‌گیری کلی

محاسبه‌ی تبخیر - تعرق واقعی در یک گام زمانی به‌گزینش روش عددی مناسب و گام زمانی مورد استفاده برای محاسبه‌ی نمایه‌ی تنش آبی از روی رطوبت ناحیه‌ی ریشه بستگی دارد. از آن‌جا که در خلال گام زمانی رطوبت خاک تغییر می‌کند، گزینش روش عددی مناسب برای محاسبه‌ی نمایه‌ی تنش سودمند است. در دوره‌های بدون آبیاری و بارندگی، تبخیر - تعرق واقعی با روش تحلیلی و روش‌های عددی مختلف شامل اولر صریح، اولر ضمنی، اولر تصحیح شده، نقطه‌ی میانی، هون مرتبه‌ی سوم محاسبه شد. نتایج نشان داد که با تداوم تنش خطاهای نسبی تبخیر - تعرق واقعی گیاه محاسبه شده با روش‌های عددی در هر گام زمانی مشخص، مستقل از رطوبت اولیه‌ی خاک است. مقادیر مطلق خطاهای نسبی تبخیر - تعرق واقعی گیاه با شمار گام زمانی کاهش می‌یابد که پایداری عددی شبیه‌سازی متوالی بیلان آب خاک را تضمین می‌کند.

استفاده از روش‌های اولر صریح و روش هون مرتبه‌ی سوم مقادیر تبخیر - تعرق واقعی گیاه را بیش‌برآورد کرد در حالی که روش‌های اولر ضمنی، نقطه‌ی میانه و اولر اصلاح شده به کم‌برآورد منجر گردید. در جایگاه مقایسه، مقادیر مطلق خطاهای نسبی از روش اولر صریح، به اولر ضمنی، به نقطه‌ی میانه، به اولر اصلاح شده و به روش هون مرتبه‌ی سوم، کاهش می‌یابد. از نقطه نظر کاربردی برای

از نقطه نظر کاربردی باید بهترین روش عددی را پیشنهاد داد. شنگ (14) این کار را با توجه به بازه‌هایی از دو متغیر مستقل گام زمانی و ET_c انجام داد و برای هر مقدار مشخص از گام زمانی و مقدار مشخص ET_c یک روش عددی (یا بیش‌تر) را پیشنهاد کرد. انجام این کار برای ما تقریباً ناممکن است زیرا برخلاف شنگ (14) ما به چهار متغیر مستقل پرداخته‌ایم، یعنی علاوه بر متغیرهای گام زمان و ET_c ، نوع بافت خاک و نیز درجه‌ی حساسیت گیاه را هم دخیل کرده‌ایم. بنابراین گرچه می‌توان به شیوه‌ی شنگ اقدام کرد ولی به دلیل تعدد عوامل جبه‌ی کاربردی مسئله از دست می‌رود. بنابراین از جنبه‌ی رفتار کلی روش‌های عددی به مسئله نگاه کردیم. همان‌طور که توضیح داده شد در هر ترکیبی از بافت خاک و نوع گیاه، خطا با افزایش گام زمانی و افزایش ET_c افزایش می‌یابد. از این رو تنها بیش‌ترین مقدار خطا (یعنی مترادف با گام زمانی 10 روز و ET_c برابر با 12 میلی‌متر در روز) را در نظر گرفتیم. در روش اولر صریح حداکثر خطا در بهترین حالت از 40% کم‌تر نبود (متناظر با خاک‌های متوسط/سنگین و گیاه حساس؛ شکل 2) ولی برای سایر ترکیبات بافت خاک و درجه‌ی حساسیت گیاه کاملاً متغیر و به بزرگی 150% می‌رسید. در مقابل، رفتار حداکثر خطا (برای گام زمانی 10 روز و ET_c برابر با 12 م.م. در روز) در روش اولر ضمنی کاملاً استوار بوده و برای تمامی ترکیبات بافت خاک و نوع گیاه در حدود 20% بود (شکل 3). رفتار خطا در روش اولر اصلاح شده (شکل 4) متغیر بود و گرچه در دو مورد (خاک‌های متوسط/سنگین و گیاه حساس) به حدود 10% می‌رسید ولی در بقیه‌ی شرایط بین 20% و 100% نوسان داشت. مقدار خطا در روش هون درجه‌ی سوم (شکل 5) به‌طور کلی کم‌تر از سه روش دیگر بود. ولی استواری این روش به‌خوبی روش اولر ضمنی (شکل 3) نبود. گرچه حداکثر خطا در این روش بالغ بر 50% (متناظر با ترکیب خاک سبک و گیاه حساس) بود ولی میانگین تمامی حداکثرهای خطا در این روش حدود 14% و بدون بزرگ‌ترین خطای 50 درصدی به کم‌تر از 10% می‌رسید. بنابراین از نقطه نظر کاربردی روش اولر ضمنی به‌دلیل استواری در نتایج و روش هون مرتبه‌ی سوم به‌دلیل مقدار حداکثر خطای نسبی کم‌تر برای کلیه‌ی ترکیبات نوع خاک و گیاه پیشنهاد می‌شود. به‌نظر می‌رسد که محدودیت عمده در این نگرش مربوط به میانگین ET_c در خلال گام زمانی باشد. در حالت کلی ET_c تابع زمان بوده و از روزی به روز دیگر تغییر می‌کند. طبیعتاً هر چه گام زمانی طولانی‌تر باشد میانگین‌گیری از ET_c و ثابت دانستن آن با خطای بیش‌تری توأم خواهد بود.

خطاهای نسبی ET_a واقعی محاسبه شده با روش‌های عددی در گام‌های زمانی متوالی

شبیه‌سازی بیلان آب خاک و محاسبه‌ی تبخیر در گام‌های زمانی

سپاسگزاری

این تحقیق در زمان حضور در دانشگاه مانیٹوبا و در قالب فرصت مطالعاتی اعطا شده به نویسنده توسط دانشگاه فردوسی مشهد انجام گردید که بدین وسیله تشکر می‌شود.

کلیه ترکیبات نوع خاک و گیاه، روش اولر ضمنی به دلیل استواری در نتایج و روش هون مرتبه‌ی سوم به دلیل حداکثر خطای نسبی کم‌تر پیشنهاد می‌شود.

منابع

- 1- Allen R.G., Pereira L.S., Raes D., and Smith M. 1998. Crop evapotranspiration –Guidelines for computing crop water requirements. FAO Irrigation and Drainage Paper 56. Food and Agriculture Organization of the United Nations: Rome, Italy. ISBN 92-5-104219-5. Online at <http://www.fao.org/docrep/X0490E/X0490E00.htm>
- 2- Annandale J.G., Benade N., Jovanovic N.Z., Steyn J.M., Du Sautoy N., and Marais D. 1999. Facilitating Irrigation Scheduling by Means of the Soil Water Balance Model, Water Research Commission Report No. 753/1/99, Pretoria, South Africa.
- 3- Cesanelli A., and Guarracino L. 2009. Estimation of actual evapotranspiration by numerical modeling of water flow in the unsaturated zone: a case study in Buenos Aires, Argentina. *Hydrogeology Journal*, 17: 299-306.
- 4- Cesanelli A., and Guarracino L. 2011. Numerical modeling of actual evapotranspiration of a coffee crop. *Scientia Agricola (Piracicaba, Brazil)*, 68(4): 395-399.
- 5- Chapra S.S., and Canale R.P. 2005. Numerical Methods for Engineers. Tata McGrawHill Book Company.
- 6- Higham N.J. 1996. Accuracy and stability of numerical algorithms, Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1996. ISBN 0-89871-355-2
- 7- Jensen M.E., Robb D.C.N., and Fanzoy C.E. 1970. Scheduling irrigation using climate- crop- soil data. *Journal of the Irrigation and Drainage Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers* 96: 25-28.
- 8- Jovanovic N., and Israel S. 2012. Critical Review of Methods for the Estimation of Actual Evapotranspiration in Hydrological Models, *Evapotranspiration - Remote Sensing and Modeling*, Ayse Irmak (Ed.), ISBN: 978-953-307-808-3, InTech, Available from:
- 9- <http://www.intechopen.com/books/evapotranspiration-remote-sensing-and-modeling/critical-review-of-methods-for-the-estimation-of-actual-evapotranspiration-in-hydrological-models>
- 10- Moazenzadeh R. 2013. Monitoring Hydrologic System of Neishabour Watershed using Remote Sensing Technique. PhD Dissertation. Water Engineering Department, College of Agriculture, Ferdowsi University of Mashhad (in Persian with English abstract)
- 11- Muralidharan D., and Knapp K.C. 2009. Spatial dynamics of water management in irrigated agriculture. *Water Resources Research*, 45: W05411. DOI: 10.1029/2007WR006756.
- 12- Poulouvassilis A., Anadranistaki M., Liakatas A., Alexandris S., and Kerkides P. 2001. Semi- empirical approach for estimating actual evapotranspiration in Greece. *Agricultural Water Management*, 51: 143-152.
- 13- Rao N.H., Sarma P.B.S., and Chander, S. 1988. Irrigation scheduling under a limited water supply. *Agricultural Water Management*, 15: 165-175.
- 14- Shafei M. 2009. Modeling of surface water balance by using SWAT model and GIS tool in Neyshabour watershed. MSc Thesis. Water Engineering Department, College of Agriculture, Ferdowsi University of Mashhad (in Persian with English abstract).
- 15- Shang S. 2012. Calculating actual crop evapotranspiration under soil water stress conditions with appropriate numerical methods and time step. *Hydrological Processes*, 26: 3338–3343. DOI: 10.1002/hyp.8405
- 16- Shang S.H., and Mao X.M. 2006. Application of a simulation based optimization model for winter wheat irrigation scheduling in Nort China. *Agricultural Water Management*, 85: 314-322.
- 17- Zhang L., Dawes W.R., and Walker G.R. 2001. The Response of Mean Annual Evapotranspiration to Vegetation Changes at Catchment Scale. *Water Resources Research*, 37: 701-708.

Combined Effects of Numerical Method Type and Time Step on Water Stressed Actual Crop ET

B. Ghahraman¹

Received: 09-04-2013

Accepted: 15-09-2015

Introduction: Actual crop evapotranspiration (Et_a) is important in hydrologic modeling and irrigation water management issues. Actual ET depends on an estimation of a water stress index and average soil water at crop root zone, and so depends on a chosen numerical method and adapted time step. During periods with no rainfall and/or irrigation, actual ET can be computed analytically or by using different numerical methods. Overall, there are many factors that influence actual evapotranspiration. These factors are crop potential evapotranspiration, available root zone water content, time step, crop sensitivity, and soil. In this paper different numerical methods are compared for different soil textures and different crops sensitivities.

Materials and Methods: During a specific time step with no rainfall or irrigation, change in soil water content would be equal to evapotranspiration, ET . In this approach, however, deep percolation is generally ignored due to deep water table and negligible unsaturated hydraulic conductivity below rooting depth. This differential equation may be solved analytically or numerically considering different algorithms. We adapted four different numerical methods, as explicit, implicit, and modified Euler, midpoint method, and 3-rd order Heun method to approximate the differential equation. Three general soil types of sand, silt, and clay, and three different crop types of sensitive, moderate, and resistant under Nishaboor plain were used. Standard soil fraction depletion (corresponding to $ET_c=5 \text{ mm.d}^{-1}$), p_{std} , below which crop faces water stress is adopted for crop sensitivity. Three values for p_{std} were considered in this study to cover the common crops in the area, including winter wheat and barley, cotton, alfalfa, sugar beet, saffron, among the others. Based on this parameter, three classes for crop sensitivity was considered, sensitive crops with $p_{std}=0.2$, moderate crops with $p_{std}=0.5$, and resistive crops with $p_{std}=0.7$. Therefore, nine different classes were formed by combination of three crop types and three soil class types. Then, the results of numerical methods were compared to the analytical solution of the soil moisture differential equation as a datum. Three factors (time step, initial soil water content, and maximum evaporation, ET_c) were considered as influencing variables.

Results and Discussion: It was clearly shown that as the crops becomes more sensitive, the dependency of Et_a to ET_c increases. The same is true as the soil becomes fine textured. The results showed that as water stress progress during the time step, relative errors of computed ET by different numerical methods did not depend on initial soil moisture. On overall and irrespective to soil tpe, crop type, and numerical method, relative error increased by increasing time step and/or increasing ET_c . On overall, the absolute errors were negative for implicit Euler and third order Heun, while for other methods were positive. There was a systematic trend for relative error, as it increased by sandier soil and/or crop sensitivity. Absolute errors of ET computations decreased with consecutive time steps, which ensures the stability of water balance predictions. It was not possible to prescribe a unique numerical method for considering all variables. For comparing the numerical methods, however, we took the largest relative error corresponding to 10-day time step and ET_c equal to 12 mm.d^{-1} , while considered soil and crop types as variable. Explicit Euler was unstable and varied between 40% and 150%. Implicit Euler was robust and its relative error was around 20% for all combinations of soil and crop types. Unstable pattern was governed for modified Euler. The relative error was as low as 10% only for two cases while on overall it ranged between 20% and 100%. Although the relative errors of third order Heun were the smallest among the all methods, its robustness was not as good as implicit Euler method. Excluding one large error of 50%, the average relative errors in this method was less than 10%. However, the ET_c is time-dependent and varies from one day to another. So, averaging ET_c over a larger time step brings about more error in computations. Accumulated relative error in Et_a ($ET_p=5 \text{ mm.d}^{-1}$, $W_0=W_j$, $\Delta t=1 \text{ d}$) under medium soil and crop type was decreased as the number of time steps increased, irrespective of the numerical method.

Conclusions: Based on practical considerations, we propose implicit Euler for its robustness, and 3-rd order Heun for its low maximum relative error for all combinations of soil and crop types.

Keywords: Soil moisture depletion, Soil water balance, Stability in numerical methods, Water stress index