Journal of Water and Soil
Vol. 27, No. 6, Jan.-Feb. 2014, p. 1123-1132

نشریه آب و خاک (علوم و صنایع کشاورزی)
جلد ۲۷، شماره ۶، بهمن - اسفند ۱۳۹۲، ص. ۱۱۳۲-۱۱۲۳

استفاده از توابع درون‌یاب فرکتال برای ریزمقیاس‌نمایی زمانی داده‌های درجه حرارت

ناهید ولیدی[1*]- علی نقی ضیایی[2]- بیژن قهرمان[3]- حسین انصاری[4]

تاریخ دریافت:۱۳۹۱/۱۰/۲۴
تاریخ پذیرش:۱۳۹۲/۱۰/۱

چکیده

به منظور اعمال مدیریت بهینه در حوضه آبریز، ریزمقیاس‌نمایی[5] زمانی و مکانی خصوصیات هیدرولوژیک حوضه ضروری است. با استفاده از اطلاعات ریزمقیاس شده مؤلفه‌های معادلات بیلان آب و انرژی می‌توان بیلان آب را با مقیاس زمانی و یا مکانی مطلوب محاسبه نمود. هندسه فرکتالی[6] شاخه‌ای از ریاضیات است که در میدان‌های گسسته و متناوب کاربردهای فراوانی داشته و در سال‌های اخیر برای تولید داده‌هایی با مقیاس متفاوت از داده‌های اندازه‌گیری شده مورد استفاده قرار گرفته است. در این پژوهش از ابزار توابع درون‌یاب فرکتال[7] برای ریزمقیاس‌نمایی زمانی داده‌های روزانه دما استفاده شده است. مقدار بُعد فرکتالی[8] که معیاری از بی‌نظمی در نوسانات کمیت مورد نظر می‌باشد برای سری زمانی دمای روزانه در ایستگاه سینوپتیک مشهد برای ۱۶ سال متوالی نیز محاسبه گردید. متوسط بُعد فرکتال برای دوره ۱۹۹۲ تا ۲۰۰۷ معادل ۱/۵۴ برآورد گردید. همچنین با استفاده از توابع درون‌یاب فرکتال از داده‌های دمای ظهر با مقیاس زمانی ۱۵ روز، سری زمانی دمای ساعتی تولید و با مقادیر اندازه‌گیری شده مقایسه گردید. نشان داده شد که علیرغم فاصله زمانی قابل ملاحظه بین دو اندازه‌گیری متوالی (۱۵ روز) می‌توان با ضریب تعیین۰/۷۷ و خطای معادل ۷ واحد مقادیر دما با مقیاس زمانی سه ساعت را برآورد نمود.

واژه‌های کلیدی: تابع تکرار، قضیه کالج، دمای روزانه، ریزمقیاس نمایی، هندسه فرکتال

مقدمه

جریان مدل‌سازی پدیده‌های ژئوفیزیکی به دو شاخه‌ی کلی تقسیم می‌گردد که در دو دهه‌ی گذشته به‌طور همزمان پیشرفت نموده است. بخشی از محققین به‌دنبال مدل کردن این پدیده‌ها در مقیاس جهانی بوده و گروهی دیگر شبیه‌سازی پدیده‌های اقلیمی را در مقیاس منطقه‌ای و محلی دنبال نموده‌اند. مدل‌سازی پارامترهای مؤثر در معادله‌ی بیلان آب و انرژی در مقیاس حوضه‌ای مستلزم ریزمقیاس کردن زمانی و مکانی داده‌های اقلیمی که عمدتاً با تناوب زمانی زیاد و در فواصل مکانی بزرگ اندازه‌گیری می‌شوند، می‌باشد (۵). داده‌های مورد استفاده در مدل‌سازی محلی بیلان آب از دیدگاه مقیاس تغییرات به دو دسته تقسیم می‌شوند. گروهی از این داده‌ها مانند سطح ایستابی با کاهش مقیاس از دامنه‌ی تغییرات آن‌ها کاسته شده و گروهی با کاهش مقیاس، دامنه‌ی نوساناتشان وسیع‌تر می‌گردد. به‌عنوان مثال نوسانات تغییرات بارندگی در مقیاس روزانه ولی در مقیاس سالانه کم می‌باشد (۵). برای این گروه از اطلاعات که تقریباً تمامی داده‌های مورد نظر در معادله‌ی بیلان آب در مقیاس حوضه را دربرمی‌گیرد، استفاده از توابع درون‌یابی متداول می‌توانند نتایج نامطلوبی را تولید نماید. به‌عنوان مثال استفاده از تابع درون‌یاب اسپیلاین[9] برای پهنه‌بندی بارندگی می‌تواند به‌علت استفاده از چندجمله‌ای درجه سه (تابع اسپیلاین مرتبه سوم یک تابع چندجمله ای مرتبه سوم است که مشتقات مرتبه‌ی اول و دوم آن پیوسته است.)، منجر به مقادیر منفی بارندگی گردد. لذا برای ریزمقیاس کردن زمانی یا مکانی این پارامترها باید از ابزاری که ارتباط بین مقیاس‌های متفاوت را با دقت بیش‌تری لحاظ می‌کند استفاده نمود. هندسه‌ی فرکتالی شاخه ای از ریاضیات است که در میدان‌های گسسته و متناوب کاربردهای فراوانی داشته و در سال‌های اخیر از آن برای تولید داده‌هایی با مقیاس زمانی یا مکانی متفاوت از داده‌های اندازه‌گیری شده، استفاده شده است (۲).

هندسه علمی است که در چارچوب قوانین و توابع معین به تبیین

۱، ۲، ۳ و ۴- به‌ترتیب دانشجوی کارشناسی ارشد، استادیار، استاد و دانشیار گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه فردوسی مشهد
(* - نویسنده مسئول: Email: N.Validi@ymail.com)

5- Downscaling
6- Fractal geometry
7- Fractal interpolation functions
8- Fractal dimension

9-Spline interpolation function

اشکال هندسی موجود در طبیعت می‌پردازد و به‌طور کلی به دو دسته‌ی هندسه اقلیدسی[1] و هندسه نااقلیدسی تقسیم‌بندی می‌شود. برای تبیین اشکال منظم هندسی از هندسه اقلیدسی استفاده شده که اصول آن بر مبنای اندازه‌گیری است. اما هندسه اقلیدسی قادر به تبیین اشکال و توابع ناهموار، آشفته و غیرکلاسیک نمی‌باشد. بنابراین برای تبیین اشکال نامنظم هندسی از هندسه‌ی فرکتالی یا هندسه‌ی طبیعی استفاده می‌شود. علت نام‌گذاری این هندسه به نام هندسه‌ی طبیعی این است که در طبیعت بسیاری از اجسام، دارای اشکال نامنظم هندسی بوده و برای مدل‌سازی این اجسام نمی‌توان از توابعی که در هندسه اقلیدسی تعریف شده‌اند استفاده نمود. به‌عنوان مثال با استفاده از مفاهیم هندسه فرکتالی (تعریف الگوی مناسب توابع تکرار) می‌توان برگ سرخس را با دقت بسیار زیادی مدل‌سازی کرد. در واقع هندسه‌ی فرکتالی گسترشی از هندسه‌ی اقلیدسی بوده و یکی از شاخه‌های جدید در علم ریاضیات است که در برابر تفسیر و شبیه-سازی اشکال مختلف طبیعت از خود انعطاف و قابلیت بی‌نظیری نشان می‌دهد. به‌طور کلی اجسام فرکتالی دارای سه خصوصیت خودمتشابهی[2]، پیچیدگی در مقیاس خرد و بُعد کسری می‌باشند (۱). منظور از خودمتشابهی در جسم این است که هر قسمت کوچک از آن جسم مشابه کل جسم باشد. اگر بُعد نقطه، خط و صفحه به‌ترتیب برابر با صفر، یک و دو درنظر گرفته شوند، بُعد اجسام فرکتالی بر خلاف همه این‌ها عدد صحیح نبوده و بُعد آن عدد کسری است که در فضای دو بُعدی، مقدار آن از یک بیش‌تر و از دو کم‌تر است (۱). توابع فرکتالی به‌دلیل این‌که بر اساس خاصیت خودمتشابهی در اجسام فرکتالی عمل می‌کنند، نسبت به سایر روش‌های درون‌یابی که در هندسه اقلیدسی تعریف شده‌اند، دارای کارایی بهتری می‌باشند. درحالی‌که سایر روش‌های درون‌یابی توجهی به خصوصیت خودمتشابهی و مقیاس در مجموعه داده‌ها و ارتباط میان آن‌ها ندارند. توابع درون‌یاب فرکتال (که در ادامه تشریح می‌گردد) برای مدل‌سازی سری‌های زمانی مختلفی مورد استفاده قرارگرفته است. میزل و هیز (۴) با استفاده از توابع درون‌یاب فرکتال به مدل‌سازی داده‌های نقطه‌ای نوسانات سطح زمین و همچنین سری‌های زمانی کمیت‌های مختلفی مانند الکتروکاردیوگرام، لوگ چاه و نوسانات صوت پرداخته و دو روش نیز برای توسعه‌ی توابع فرکتالی ارائه نمودند. چانژن و همکاران (۲) برای مدل‌سازی سیگنال‌ها، از توابع درون‌یاب فرکتال استفاده نمودند. پاتیرانا (۵) با استفاده از توابع درون‌یاب فرکتال به مدل‌سازی سری زمانی بارندگی ساعتی در ژاپن پرداخته و سری زمانی بارندگی با مقیاس ۵ دقیقه را تولید نموده است. ضیایی و همکاران (۹) توابع درون‌یاب فرکتال را برای مدل‌سازی مؤلفه‌های سرعت و تنش برشی رینولدز در جریان متلاطم و در کانال‌های باز به‌کار بردند. زین فو و زیائو فن (۸) از توابع درون‌یاب فرکتال برای مدل‌سازی داده‌های زمین لرزه‌شناسی استفاده نمودند.

1- Euclidean geometry
2-Self-similarity

با توجه به محدودیت در تعداد سال‌های آماری که دما ثبت شده است و همچنین وجود داده‌های مفقود در سری زمانی داده‌های دما نیاز به ارائه‌ی روشی نوین برای یافتن داده‌های مفقود و تولید داده‌ها می‌باشد. علاوه بر این، داده‌های دما با مقیاس‌های زمانی متفاوتی ثبت می‌شوند و چنانچه نیاز به دانستن مقدار دما در زمانی کم‌تر از زمان اندازه‌گیری شده باشد با استفاده از توابع درون‌یاب خطی، مقدار دما در زمان مورد نظر تخمین زده شده که این روش همراه با خطا است. یکی از برتری‌های توابع درون‌یابی فرکتال نسبت به سایر روش‌های درون‌یابی مطرح شده در هندسه اقلیدسی، درنظر گرفتن خاصیت خودمتشابهی در مجموعه داده‌ها است که با توجه به این خاصیت رفتار جسم فرکتالی (برای مثال سری زمانی داده‌های دمای روزانه) بررسی شده و تابعی که بیان کننده‌ی این رفتار باشد تعیین می‌شود. بنابراین در این پژوهش از توابع درون‌یاب فرکتال برای مدل‌سازی داده‌های دمای روزانه (داده‌های ثبت شده در ساعت ۱۲ ظهر) در ایستگاه سینوپتیک مشهد در سه سال آماری ۱۹۹۲، ۱۹۹۳ و ۱۹۹۴ و تولید سری زمانی داده‌هایی با مقیاس زمانی سه ساعت (مقیاس زمانی متداول برای گزارش داده‌های دما) در این ایستگاه استفاده شد. همچنین توابع درون‌یاب فرکتال، ابزاری برای محاسبه‌ی بُعد فرکتال (معیاری از نحوه تغییرات دمای روزانه) ارائه می‌نمایند که با سهولت و دقت بیش‌تری نسبت به روش‌هایی مانند روش شمارش مربعات قادر به برآورد این کمیت می‌باشد (۳). ازاین‌رو از این ابزار برای محاسبه بُعد فرکتال دمای روزانه در یک دوره‌ی ۱۶ ساله نیز استفاده گردید.

مواد و روش‌ها

پشتوانه نظری

از دیدگاه هندسی، جسم فرکتالی مجموعه‌ای پیچیده است که از اعمال توابع هندسی ساده روی فضای هندسی ساده مانند فضای دو بُعدی، تولید می‌شود. به‌دلیل خاصیت خودمتشابهی در اجسام فرکتالی، توابعی که در هندسه‌ی فرکتالی تعریف می‌شوند، دارای خاصیت انقباضی می‌باشند. منظور از خاصیت انقباضی توابع فرکتال این است که هرگاه این توابع روی مجموعه‌ای از نقاط اعمال گردند، فاصله‌ی نقاط آن مجموعه را کاهش می‌دهند (۱). پس از اعمال مکرر تابع روی فضای متریک[3]، تابع به نقطه‌ای ثابت در آن فضا همگرا می‌شود.

3- Metric space

برای اعمال مکرر این توابع به سیستم تابع تکرار[1] نیاز می‌باشد که شامل مجموعه‌ای از توابع انقباضی[2] است که روی فضای متریک اعمال می‌شوند. بنابراین هر سیستم تابع تکرار به یک نقطه‌ی ثابت در فضای متریک همگرا می‌شود. این نقطه ثابت، اترکتور[3] سیستم تابع تکرار نامیده شده و در واقع جسم فرکتالی است. به‌عبارت دیگر اترکتور سیستم تابع تکرار، نمودار پیوسته توابع درون‌یاب فرکتالی است که بر مجموعه داده‌های یک کمیت برازش می‌یابد (۱).

در هندسه‌ی فرکتالی توابع درون‌یابی مختلفی (برای مثال توابع خطی، توابع چند جمله‌ای و توابع نسَبی[4] را می‌توان تعریف کرد (۱). همچنین مدل‌های مختلفی نیز برای تولید سیستم تابع تکرار وجود دارد که از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به مدل فرکتال نسَبی و مدل فرکتال نسَبی قطعه‌ای[5] اشاره کرد (۴). پس از تعیین نوع توابع درون‌یابی و همچنین تعیین مدلی برای تولید سیستم تابع تکرار، می‌توان از دو الگوریتم متفاوت برای تولید جسم فرکتال یا بررسی ماهیت فرکتالی مجموعه‌ای از داده‌ها استفاده نمود. این الگوریتم‌ها عبارتند از الگوریتم با تکرار معین و الگوریتم با تکرار تصادفی[6]. در الگوریتم با تکرار معین، احتمال کاربرد تمامی توابع درون‌یابی که در سیستم تابع تکرار تعریف شده‌اند، برای تولید جسم فرکتالی یکسان است ولی در الگوریتم با تکرار تصادفی، این احتمال متفاوت می‌باشد (۱). تابع برشی نسَبی[7] نوعی از توابع درون‌یابی است که در هندسه‌ی فرکتالی تعریف شده و در فضای دو بُعدی به‌صورت رابطه ۱ بیان می‌شود.

$$W\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n & 0\\ c_n & d_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e_n\\f_n\end{pmatrix} \qquad (۱)$$

که در آن W تابع برشی نسَبی، $(x \quad y)^T$ مختصات هر نقطه از فضای دو بُعدی و a_n, c_n, d_n, e_n و f_n پارامترهای تابع می‌باشند. منظور از تابع برشی این است که این تابع، هر خطی موازی محور y را به خطی موازی محور y انتقال می‌دهد (b_n؛ مؤلفه‌ی دوم در سطر اول در ماتریس 2×2 در تابع فوق صفر بوده به‌طوری‌که هر خط عمودی پس از انتقال به‌صورت عمودی باقی می‌ماند). با توجه به خاصیت انقباضی توابع درون‌یابی فرکتال، برای هر تابع در سیستم تابع تکرار پارامتر d به‌عنوان عامل انقباض یا فاکتور مقیاس عمودی[8] تعریف شده و دامنه‌ی تغییرات آن به‌صورت $-1<d<1$ می‌باشد (۱).

تعیین ضرایب توابع برشی نسَبی

اگر تعدادی از نقاط در مجموعه‌ای از داده‌ها به عنوان نقاط درون‌یابی[9] درنظر گرفته شده و سیستم تابع تکرار به‌صورت $\{R^2 : W_n, n=1,2,...,N\}$ تعریف گردد به‌گونه‌ای که توابع تعریف شده در این سیستم از نوع توابع برشی نسَبی و به‌صورت رابطه‌ی ۱ باشند، آن‌گاه با درنظر گرفتن دو شرط زیر می‌توان ضرایب توابع درون‌یابی را در فاصله‌ی هر دو نقطه‌ی درون‌یابی متوالی محاسبه نمود (۱):

$$\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\end{pmatrix},\ W_n\begin{pmatrix}x_N\\y_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix};\quad n=1,2,...,N \qquad (۲)$$

با اعمال این دو شرط بر روی دو نقطه‌ی درون‌یابی متوالی، چهار معادله حاصل می‌شود:

$$\begin{cases}a_n x_0 + e_n = x_{n-1}\\ a_n x_N + e_n = x_n\\ c_n x_0 + d_n y_0 + f_n = y_{n-1}\\ c_n x_N + d_n y_N + f_n = y_n\end{cases} \qquad (۳)$$

با حل این معادلات و مطابق روابط ۴، چهار مجهول a_n، c_n، e_n و f_n در تابع نسَبی محاسبه می‌شوند (۱):

$$\begin{cases}a_n = \dfrac{x_n - x_{n-1}}{x_N - x_0}\\ e_n = \dfrac{x_N x_{n-1} - x_0 x_n}{x_N - x_0}\\ c_n = \dfrac{y_n - y_{n-1}}{x_N - x_0} - \dfrac{d_n(y_N - y_0)}{x_N - x_0}\\ f_n = \dfrac{x_N y_{n-1} - x_0 y_n}{x_N - x_0} - \dfrac{d_n(x_N y_0 - x_0 y_N)}{x_N - x_0}\end{cases} \qquad (۴)$$

با توجه به فضای متریک و مقدار پارامترهای توابع تعریف شده در سیستم تابع تکرار، می‌توان اجسام فرکتالی متعددی را مدل‌سازی نمود. پس از تعریف فضای متریک و همچنین تعیین توابع درون‌یاب تعریف شده در سیستم تابع تکرار برای هر جسم، برای تولید اترکتور سیستم تابع تکرار که در واقع همان جسم فرکتالی می‌باشد از الگوریتم با تکرار معین یا الگوریتم با تکرار تصادفی استفاده می‌گردد.

مدل‌سازی فرکتالی

همان‌طور که در قسمت قبل بیان شد با استفاده از سیستم تابع تکرار می‌توان جسم فرکتالی را تولید نمود ولی در کاربردهای مهندسی معمولا جسم فرکتالی که همان کمیت مورد نظر می‌باشد (در این‌جا سری زمانی دمای روزانه) در اختیار بوده و هدف، تعیین سیستم تابع تکراری که بتواند آن کمیت را با دقت مطلوب مدل کند می‌باشد. از این‌رو برای بررسی ماهیت فرکتالی مجموعه‌ای از داده‌ها و سپس

1- Iterated function system
2- Contraction mapping
3- Attractor
4- Affine mapping
5- Self-affine fractal and Piece-wise self-affine fractal model
6- Deterministic and Random iterated algorithm
7- Affine shear transformation
8- Vertical scaling factor
9- Interpolation points

ریزمقیاس‌نمایی زمانی یا مکانی آن مجموعه (راهبرد متفاوت برای ریزمقیاس‌نمایی زمانی و مکانی وجود دارد)، ابتدا باید توابع درون‌یاب را به‌گونه‌ای محاسبه نمود که اگر بر مجموعه داده‌های اولیه اعمال شده و تکرار توابع درون‌یابی ادامه یابد، در نهایت به اترکتوری میل نماید که بتواند به‌خوبی آن کمیت را مدل کند. اما در عمل به‌علت تکرار زیاد مورد نیاز و حجم محاسبات بالا تولید مجموعه‌ی نهایی امکان‌پذیر نیست. بنابراین بر اساس قضیه کالج[1] می‌توان گفت اگر مجموعه‌ی L به‌عنوان مجموعه‌ای از نقاط درنظر گرفته شده و تعدادی از نقاط این مجموعه به‌عنوان نقاط درون‌یابی انتخاب شوند، آن‌گاه با استفاده از نقاط درون‌یابی می‌توان توابع درون‌یابی را محاسبه کرد. اگر این توابع یک بار روی نقاط درون‌یابی اعمال شوند مجموعه‌ی جدیدی از نقاط حاصل خواهد شد. چنانچه فاصله این مجموعه از نقاط با مجموعه‌ی اولیه L کم باشد، اترکتور سیستم تابع تکرار به مجموعه‌ی اولیه L همگرا شده و بنابراین مجموعه‌ی L، دارای ماهیت فرکتالی خواهد بود (۱). روابط ۵ و ۶ بیان ریاضی قضیه‌ی کالج است.

$$h\left(L,\bigcup_{n=1}^{N}W_n(L)\right)\le \varepsilon \qquad (5)$$

$$h(L,A)\le \frac{\varepsilon}{1-s} \qquad (6)$$

که در آن‌ها h تابعی است که فاصله‌ی دو مجموعه را از یکدیگر محاسبه می‌کند. ε کمیتی است که حداکثر فاصله‌ی میان دو مجموعه را بیان کرده و مقدار آن به سطح دقت در مدل‌سازی بستگی دارد ولی در منابع معیار عددی مشخصی برای آن تعریف نشده است. در رابطه‌ی ۶ مجموعه‌ی A اترکتورسیستم تابع تکرار است که از تکرار زیاد توابع درون‌یابی روی مجموعه داده‌ها حاصل می‌شود و s معادل بزرگ‌ترین فاکتور مقیاس عمودی در سیستم تابع تکرار است.

برای آن‌که تابع درون‌یاب فرکتال برازش مناسبی بر داده‌ها داشته باشد، ابتدا باید از میان داده‌ها نقاط درون‌یابی که از آن‌ها برای محاسبه‌ی توابع درون‌یاب استفاده می‌شوند انتخاب گردند. تعداد این نقاط، تعداد توابع درون‌یابی در سیستم تابع تکرار را نیز تعیین می‌کند. همچنین باید برای هر تابع درون‌یابی پارامتر d_n نیز محاسبه گردد. روش‌های متعددی برای تعیین این دو پارامتر وجود دارد (۲، ۴، ۷، ۸ و ۹). در این پژوهش برای تعیین نقاط درون‌یابی و نیز برای تعیین فاکتور مقیاس عمودی توابع درون‌یاب، از الگوریتم بهینه‌ی میزل و هیز استفاده شده است (۴). علاوه بر این از مدل فرکتال نسَبی برای تولید سیستم تابع تکرار و از الگوریتم با تکرار معین برای مدل‌سازی و بررسی ماهیت فرکتالی داده‌های دمای روزانه استفاده گردید (۴).

تعیین نقاط درون‌یابی و محاسبه‌ی فاکتور انقباضی توابع درون‌یاب

در این الگوریتم، اولین و آخرین داده در مجموعه داده‌ها به عنوان اولین و آخرین نقطه‌ی درون‌یابی درنظر گرفته می‌شوند. این دو نقطه با خطی مستقیم به یکدیگر متصل شده و فاصله‌ی سایر نقاط در مجموعه داده‌ها از این خط محاسبه می‌گردد. نقطه‌ای که بیش‌ترین فاصله را از خط واصل دارد تعیین شده و فاصله‌ی آن تا خط واصل معادل μ درنظر گرفته می‌شود. سپس اولین و سومین نقطه در مجموعه داده‌ها به‌ترتیب به عنوان اولین و دومین نقطه درون‌یابی اختیار شده و خطی مستقیم میان این دو نقطه رسم می‌گردد. در این بخش نیز بیش‌ترین فاصله‌ی نقاط از خط واصل اندازه‌گیری شده و معادل γ درنظر گرفته می‌شود. چنانچه در فاصله‌ی میان اولین و سومین نقطه در مجموعه داده‌ها، فاکتور مقیاس عمودی که از تقسیم γ بر μ حاصل می‌شود در بازه‌ی (۱و۱-) قرار گیرد، انتخاب نقطه سوم به عنوان دومین نقطه‌ی درون‌یابی صحیح بوده و با استفاده از رابطه‌ی ۴ سایر پارامترهای تابع محاسبه می‌شود، در غیر این‌صورت چهارمین نقطه در مجموعه داده‌ها به‌عنوان دومین نقطه‌ی درون‌یابی درنظر گرفته شده و فاکتور مقیاس عمودی محاسبه می‌گردد. این عمل تا زمانی‌که فاکتور مقیاس عمودی در فاصله‌ی تعیین شده در بازه‌ی مذکور قرار نگیرد، ادامه می‌یابد. این روش برای سایر نقاط در مجموعه داده‌ها تکرار شده تا در نهایت مجموعه‌ای از نقاط درون‌یابی به همراه سیستم تابع تکرار برای مدل‌سازی مجموعه داده‌ها تولید گردد. پس از اعمال سیستم تابع تکرار بر روی مجموعه داده‌ها، تابعی که به ازای آن کم‌ترین اختلاف میان داده‌های مشاهداتی و داده‌های مدل‌سازی شده وجود دارد، به‌عنوان اولین تابع درون‌یابی انتخاب شده و نقطه‌ی درون‌یابی متناظر با آن به عنوان دومین نقطه‌ی درون‌یابی درنظر گرفته می‌شود. مشابه این عمل برای کل مجموعه داده‌ها تکرار شده تا در نهایت نقاطی به عنوان نقاط درون‌یابی انتخاب گردند که به ازای آن‌ها کم‌ترین اختلاف میان نقاط مشاهده شده و نقاط مدل‌سازی شده وجود داشته باشد. بدین ترتیب می‌توان برای هر مجموعه‌ای از داده‌ها، به منظور مدل‌سازی آن مجموعه نقاط درون‌یابی بهینه را به همراه سیستم تابع تکرار تعیین نمود (۴).

بُعد فرکتالی

بُعد فرکتالی (D) پارامتری است که میزان بی‌نظمی در نوسانات یک کمیت را بیان می‌کند. دامنه‌ی تغییرات این پارامتر در سری‌های زمانی دو بُعدی، به‌صورت $1\le D\le 2$ می‌باشد. هر چه مقدار این پارامتر بزرگ‌تر باشد، بیانگر بی‌نظمی بیش‌تر در مجموعه داده‌های آن کمیت است. روش‌های مختلفی برای محاسبه‌ی بُعد فرکتالی یک کمیت وجود دارد. از جمله این روش‌ها می‌توان به استفاده از توابع درون‌یاب

1- Collage theorem

فرکتال و همچنین به استفاده از تعیین نمایه‌ی هرست[1] اشاره کرد. در اولین روش، اگر سیستم تابع تکرار بـا توابـع درون‌یـاب نسَـبی بـرای مجموعه‌ای از نقاط درون‌یابی تعریف شده و فاکتور مقیـاس عمـودی $0 \le |d_n| < 1$ باشد، درصورتی‌که $\sum_{n=1}^{N} |d_n| > 1$ باشـد، بُعـد فرکتـالی توابع درون‌یاب فرکتال با توجه به رابطه ۷ محاسبه می‌شود (۱).

$$\sum_{n=1}^{N} |d_n| a_n^{D-1} = 1 \qquad (۷)$$

که در آن N تعداد توابع درون‌یاب نسَـبی اسـت کـه در سیسـتم تـابع تکرار تعریف شده است. معادله ۷ غیرخطی است، لذا برای محاسـبه‌ی بُعد فرکتالی توابـع درون‌یـاب فرکتـال از روش حـل نیـوتن رافسـون استفاده می‌شود.

در روش دوم پس از تعیین نمایـه‌ی هرسـت در سـری زمـانی دو بُعدی با استفاده از رابطه ۸، مقدار بُعـد فرکتـالی بـرای سـری زمـانی محاسبه می‌شود.

$$D = 2 - H \qquad (۸)$$

که در آن H نمایه‌ی هرست و D مقـدار بُعـد فرکتـالی سـری زمـانی است.

در راستای انجام پژوهش، داده‌هـای دمـا بـا مقیـاس زمـانی سـه ساعت برای یک دوره‌ی ۱۶ ساله از سال ۱۹۹۲ تا ۲۰۰۷ در ایسـتگاه سینوپتیک مشهد دریافت و بُعد فرکتالی برای هـر سـال در ایـن دوره محاسبه گردید. به‌علت حجم محاسبات بالا، مدل‌سازی سـری زمـانی داده‌های دمای روزانه تنها برای سه سال ۱۹۹۲، ۱۹۹۳ و ۱۹۹۴ انجام گردید. در فرآیند مدل‌سازی داده‌های دمای روزانه برای هر سال بـه-طور مجـزا، از داده‌هـای ثبـت شـده در سـاعت ۱۲ ظهـر بـه عنـوان داده‌های ورودی به مدل استفاده شده است.کد مربوط به روش میـزل و هیز با اسـتفاده از نـرم افـزار Matlab نوشـته و بـرای مـدل‌سـازی داده‌های دمای روزانه به‌کار برده شد.

نتایج و بحث

نتایج حاصل از این پژوهش در دو بخش بیان می‌گردد.

۱- بررسی تغییرات سـالانه بُعـد فرکتـال بـرای یـک دوره‌ی ۱۶ ساله، از سال ۱۹۹۲ تا ۲۰۰۷، در ایستگاه سینوپتیک مشهد.

۲- مدل‌سازی سری زمانی نوسانات دمای روزانـه و ریزمقیـاس-نمایی داده‌های روزانه دما و تولیـد داده‌هـایی بـا مقیـاس زمـانی سـه ساعت.

بررسی تغییرات سالانه بُعد فرکتال

بُعد فرکتالی سری زمانی داده‌های دمای روزانه برای دوره‌ی ۱۶ سـاله از سال ۱۹۹۲ تا ۲۰۰۷ با استفاده از توابع درون‌یـاب فرکتـال مطـابق جدول ۱ برآورد شده است. با توجه به این‌که مقادیر این پارامتر در هر سال بیشتر از ۱/۵ است و با توجه به رابطه‌ی ۸ کـه مقـادیر نمایـه‌ی هرست متناظر با هر سـال کمتـر از ۰/۵ مـی‌باشـد، در سـری زمـانی داده‌های دمای روزانه، خودهمبستگی منفی[2] وجود دارد. بدین معنی که در بخشی از سری زمانی داده‌هـای دمـای روزانـه، رونـد مثبـت و در بخش دیگر روند منفی مشاهده می‌شود (۶). همچنین با توجه به این-که اختلاف میان مقادیر بُعد فرکتالی محاسبه شده برای هر سال ناچیز است می‌توان گفت که میزان نوسانات دمای روزانه در سال‌های مورد بررسی، تغییر قبل ملاحظه‌ای ننموده است. رحمان (۶) پس از تعیـین نمایه‌ی هرست با استفاده از بررسی دامنه‌ی تغییر مقیاس داده شـده‌ی R/S (سری زمانی به تعدادی بازه تفکیک و ویژگی‌هایی چون پراش و میانگین محاسبه شده، با توجه به ویژگی‌های هر بازه، مقـدار دامنـه‌ی آن تصحیح و سپس با تلفیـق تمـامی بـازه هـا، شـاخص مـورد نظـر محاسبه می‌شود)، مقدار بُعد فرکتـالی سـری زمـانی داده‌هـای دمـای روزانه در ده ایستگاه با دامنه‌ی دمایی ۰/۷- تا ۴۲ درجه سلسـیوس را به‌دست آورد. بعد فرکتال در عربستان سعودی بین ۱/۴ و ۱/۷۷ است. با توجه به این مقادیر و مقایسه‌ی آن‌ها بـا مقـادیر محاسـبه شـده در سال‌های مختلف در ایستگاه مشهد، دامنـه‌ی تغییـرات بُعـد فرکتـالی سری زمـانی داده‌هـای دمـای روزانـه $1/4<D<2$ بـوده و مقـدار بُعـد فرکتالی که بـا اسـتفاده از توابـع درون‌یـاب فرکتـال بـرآورد شـده در دامنه‌ی قابل قبولی قرار گرفته اسـت. بررسـی تغییـرات D وابسـتگی معنی‌داری با دمای میانگین روزانه، بارندگی سالانه یـا واریـانس دمـا نشان نداد.

مدل‌سازی سری زمانی نوسانات روزانه دما

پس از بررسی تغییرات بُعد فرکتالی مشاهده شد که تغییر نوسانات دمای روزانه در سال‌های مورد مطالعه ناچیز بـوده و از ایـن‌رو مـدل-سازی تنها برای سه سال از دوره‌ی مذکور صورت می‌پذیرد. نوسـانات دمای روزانـه در طـول سـه سـال ۱۹۹۲، ۱۹۹۳ و ۱۹۹۴ در شـکل ۱ نشان داده شده است. نوسانات دما بسیار نامنظمی است به‌طـوری‌کـه امکان برازش مناسب توابع اقلیدسی بر این داده‌ها وجود ندارد. بنابراین برای هر سال، از داده‌های ثبت شده در ساعت ۱۲ ظهـر هـر روز بـه-عنوان داده‌های ورودی به مدل فرکتالی اسـتفاده شـد. بـا اسـتفاده از توابع درون‌یاب و به‌کارگیری الگوریتم میزل و هیز اقدام به مدل‌سازی داده‌های دمای روزانه برای سه سال مذکور گردید. با اسـتفاده از ایـن الگوریتم، فواصل نقاط درون‌یـابی از ۳ تـا ۳۶۵ روز متغیـر انتخـاب و بهترین برازش با فاصله‌ی ۱۵ روزه حاصل گردید.

1- Hurst exponent

2- Negative autocorrelation

جدول ۱- مقدار بُعد فرکتالی و نمایه هرست برای یک دوره ۱٦ ساله از سال ۱۹۹۲ تا ۲۰۰۷

نمایه هرست	بُعد فرکتالی	سال	نمایه هرست	بُعد فرکتالی	سال
۰/۴۶	۱/۵۴	۲۰۰۰	۰/۴۵	۱/۵۵	۱۹۹۲
۰/۴۶	۱/۵۴	۲۰۰۱	۰/۴۴	۱/۵۶	۱۹۹۳
۰/۴۵	۱/۵۵	۲۰۰۲	۰/۴۴	۱/۵۶	۱۹۹۴
۰/۴۶	۱/۵۴	۲۰۰۳	۰/۴۳	۱/۵۷	۱۹۹۵
۰/۴۵	۱/۵۵	۲۰۰۴	۰/۴۶	۱/۵۴	۱۹۹۶
۰/۴۵	۱/۵۵	۲۰۰۵	۰/۴۵	۱/۵۵	۱۹۹۷
۰/۴۸	۱/۵۲	۲۰۰۶	۰/۴۵	۱/۵۵	۱۹۹۸
۰/۴۸	۱/۵۲	۲۰۰۷	۰/۴۵	۱/۵۵	۱۹۹۹

به عبارت دیگر اگر دمای ساعت ۱۲ هر ۱۵ روز به‌عنوان نقـاط درون‌یابی انتخاب شود (نقاط ثابت) و با استفاده از این نقاط ضـرایب توابـع درون‌یابی (معـادلات ۲-۴) بـه‌دسـت آیـد، اترکتـور حاصـل از تکـرار بینهایت این توابع بهترین برازش را بـر مقـادیر انـدازه‌گیـری شـده‌ی روزانه خواهد داشت. برازش نقاط حاصل از تکرار اول توابع مذکور بـه همراه بـا مقـادیر مشـاهده شـده بـرای سـالهای ۱۹۹۲ تـا ۱۹۹۴، در شکل‌های ۲ تا ۴ نشان داده شده است. با توجه به قضیه کالج چنانچه برازش تکرار اول بر مقادیر مشاهداتی مطلوب باشد برازش اترکتور نیز مطلوب خواهد بود. حال با داشتن توابع تکرار می‌توان مقدار دمـا را بـا هر مقیاسی محاسبه نمود. لذا با استفاده از مقادیر دما در ساعت ۱۲ در ابتدا، نیمه و انتهای هر ماه (۱۵ روز فاصله) دما بـا مقیـاس ۳ سـاعت به‌دست آمد. نتایج مدل‌سازی شده از داده‌های دمای روزانه در ساعات ۳، ۶، ۹، ۱۲، ۱۵، ۱۸، ۲۱ و ۲۴ با داده‌های مشـاهده شـده در همـین ساعات در ایستگاه سینوپتیک مشهد مقایسه شده است (شکل‌های ۵، ۶ و۷). در این پژوهش برای بررسـی دقـت و صـحت مـدل در تولیـد داده‌ها از معیار ریشه‌ی دوم میانگین مربعات خطـا[1] و ضـریب تعیـین (D_e) استفاده می‌شود. ریشــه‌ی دوم میـانگین مربعـات خطـا در واقـع واریانس بین دو مقدار مشاهده شده و مدل‌سازی شده را بیان کـرده و هر چه مقدار آن کم‌تر باشد، بیان کننده‌ی دقت بیش‌تر مدل در تولیـد داده‌های محاسباتی است. ضریب تعیین بـه مقایسـه‌ی میـان مقـادیر اندازه‌گیری شده، مدل‌سـازی شـده و تخمینـی پرداختـه و بـه‌صـورت رابطه‌ی ۹ تعریف می‌گردد. هر چه مقدار این آماره به یک نزدیـک‌تـر باشد بیانگر میزان دقت و صحت بیش‌تر مدل می‌باشد. علاوه بر ایـن دو آماره، شیب خط برازش یافته با شیب خط یک به یک (شیب خـط یک به یک معادل یک است) مقایسه مـی‌شـود و هرچـه شـیب خـط مذکور به یک نزدیک‌تر باشد نشان دهنده‌ی دقـت بـیش‌تـر مـدل در تولید داده‌ها است. با توجه به فاصله‌ی قابـل ملاحظـه بـین دو مقـدار اندازه‌گیری شده (۱۵ روز) و همچنین الگوریتم ساده‌ی مـورد اسـتفاده در این تحقیق، دقت و صحت مدل‌سازی سه ساعته راهگشـا ارزیـابی می‌گردد. علاوه بر این، داده‌های ثبت شده در هر ساعت از شـبانه روز نیز می‌تواند به‌طور جداگانه مورد بررسی قرار گیرد ولی در این پژوهش تنها از داده‌هـای ثبـت شـده در سـاعت ۱۲ ظهـر هـر روز بـه‌عنـوان داده‌های ورودی به مدل استفاده و کـارایی مـدل مـورد بررسـی قـرار گرفته است. برای بهبود نتایج این پژوهش می‌توان از سایر مجموعـه داده‌های روزانه استفاده و سپس بهترین مجموعـه از داده‌هـا را بـرای انجام مدل‌سازی و تولید سری زمانی داده‌های دما با مقیاس زمانی سه ساعت را انتخاب نمود.

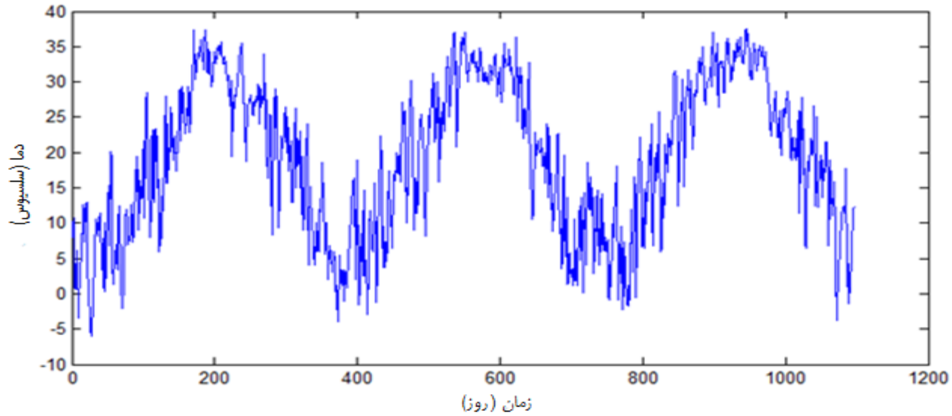
$$D = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(T_{ci} - T_{ei}\right)^2}{\sum_{i=1}^{N}\left(T_{oi} - \bar{T}_o\right)^2} \qquad (۹)$$

که در آن N تعداد داده‌ها در دوره‌ی مورد نظر، i شماره هر داده از ۱ تا N، نماد T نشان‌دهنده‌ی دما و زیروندهای c، o و e به ترتیب بیـانگر دمای اندازه‌گیری شده، مدل‌سازی شده و تخمینی می‌باشند.

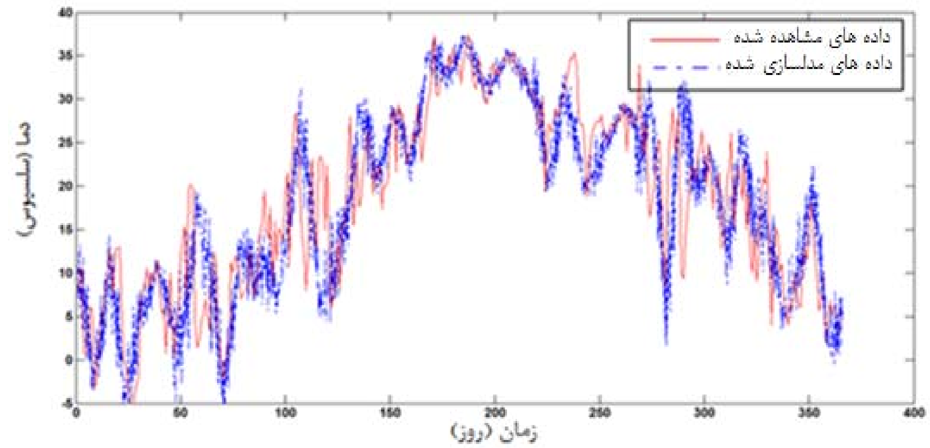
نتیجه گیری

با توجه به فاصله‌ی میان نقاط درون‌یابی در هر سه سال آمـاری، با در دست داشتن داده‌هایی با حداقل فاصله زمانی معـادل ۱۵ روز در مقیاس روزانه، داده‌های سری زمانی در مقیاس زمانی سه ساعت تولید شد. این امر با توجه به کمبود آمار و تجهیزات لازم برای ثبت آمار در ایستگاه‌های هواشناسی، امری با اهمیت اسـت. بـدیهی اسـت کـه بـا استفاده از سیستم تکرار تولید شده، می‌توان مقادیر تغییرات دمـا را بـا هر مقیاس ریزتری از سه ساعت نیز تولید نمود. نتـایج ارائـه شـده در این پژوهش حاصل از مدل‌سازی داده‌های ثبـت شـده در سـاعت ۱۲ ظهر می‌باشد. برای دستیابی به نتایج بهتر و اطمینان از عملکرد مـدل بهتر است که از داده‌های ثبت شده در ساعت‌هـای دیگـری از شـبانه روز به عنوان داده‌های ورودی به مدل استفاده و کارایی مـدل مـورد بررسی قرار گیرد.

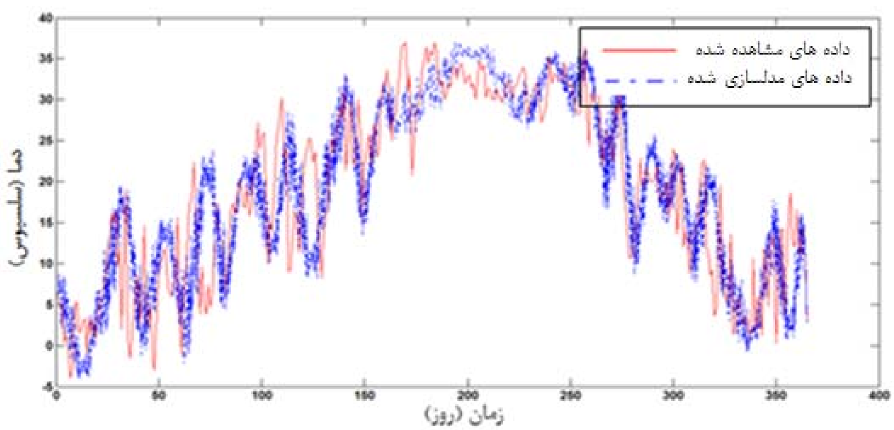
1- Root mean square error



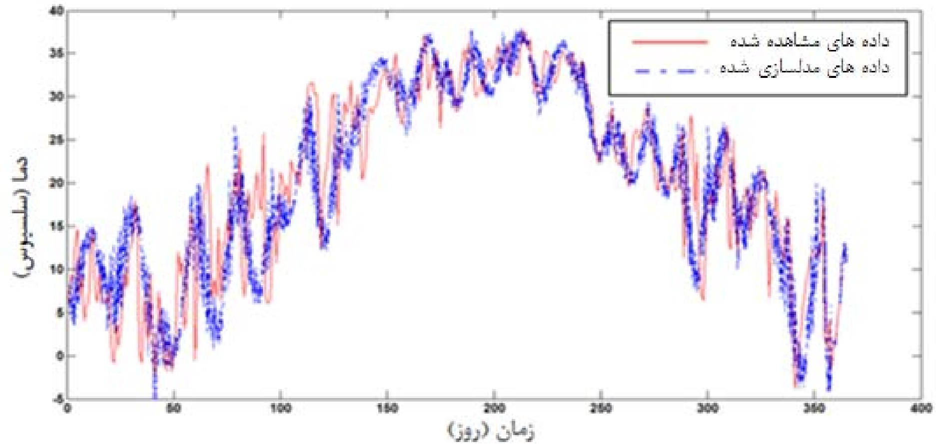
شکل ۱– نوسانات دمای روزانه در یک دوره سه ساله از ژانویه ۱۹۹۲ تا دسامبر ۱۹۹٤



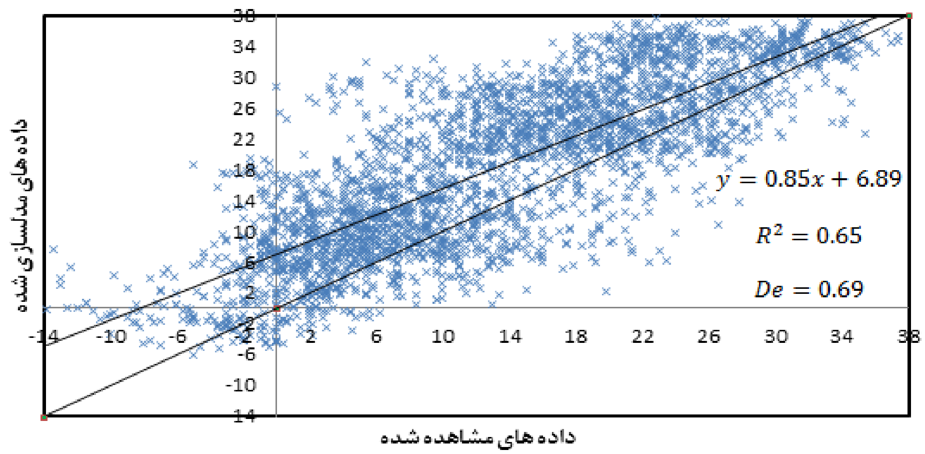
شکل ۲- مقایسه نتایج مدل‌سازی فرکتالی با مقادیر دمای روزانه مشاهده شده در سال ۱۹۹۲ با توجه به قضیه کالج در ایستگاه مشهد (اولین تکرار)



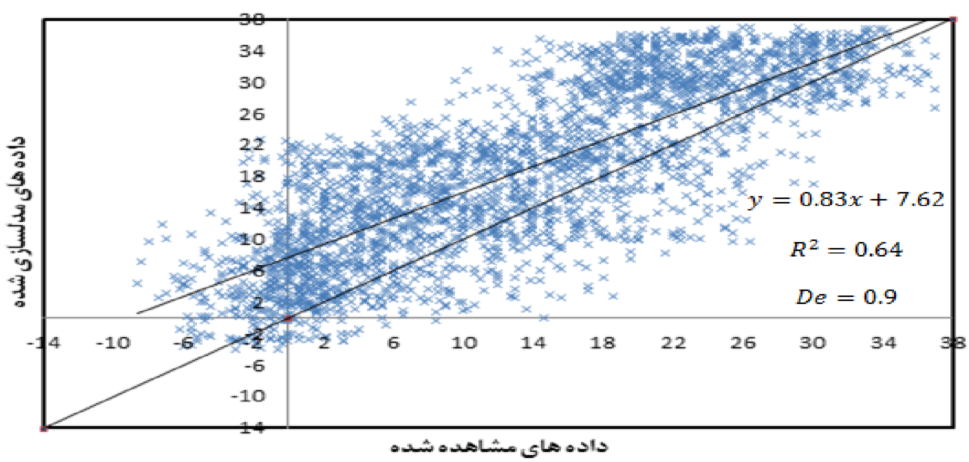
شکل ۳- مقایسه نتایج مدل‌سازی فرکتالی با مقادیر دمای روزانه مشاهده شده در سال ۱۹۹۳ با توجه به قضیه کالج در ایستگاه مشهد (اولین تکرار)



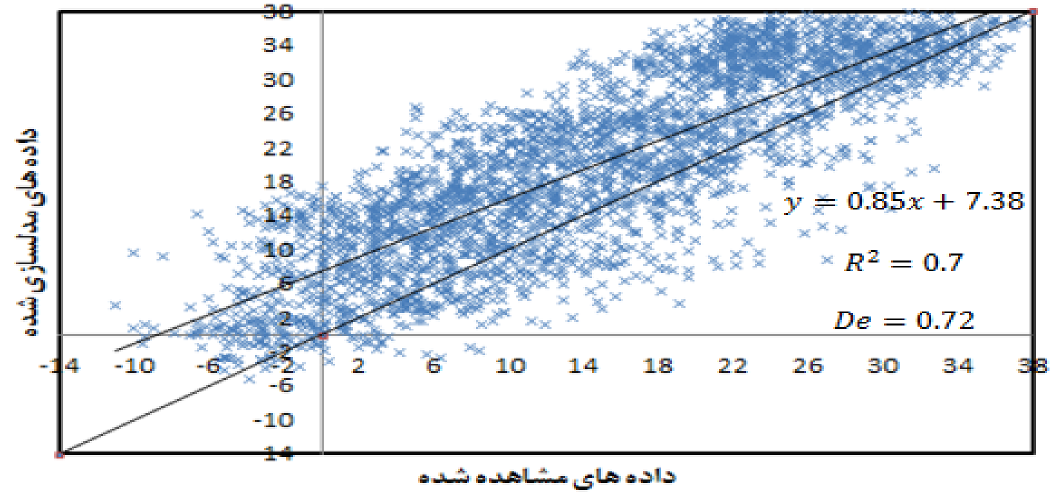
شکل ٤- مقایسه نتایج مدل‌سازی فرکتالی با مقادیر دمای روزانه مشاهده شده در سال ۱۹۹٤ با توجه به قضیه کالج در ایستگاه مشهد (اولین تکرار)



شکل ٥- مقایسه سری‌زمانی دمای مشاهده شده با مقادیر مدل‌سازی شده در مقیاس زمانی سه ساعت در سال ۱۹۹۲



شکل ٦- مقایسه سری‌زمانی دمای مشاهده شده با مقادیر مدل‌سازی شده در مقیاس زمانی سه ساعت در سال ۱۹۹۳



شکل ۷- مقایسه سری‌زمانی دمای مشاهده شده با مقادیر مدل‌سازی شده در مقیاس زمانی سه ساعت در سال ۱۹۹٤

سپس بهترین مجموعه از داده‌ها برای انجام مدل‌سازی و تولید سری زمانی داده‌های دما با مقیاس زمانی سه ساعت انتخاب گردد. علاوه بر این در این پژوهش از الگوریتم با تکرار معین برای مدل‌سازی سری زمانی داده‌های دمای روزانه استفاده شده است. بدین معنی که احتمال کاربرد تمامی توابع تعریف شده در سیستم تابع تکرار برای مدل‌سازی سری زمانی داده‌های دمای روزانه یکسان است. برای کاهش خطای مدل در تولید سری زمانی داده‌هایی با مقیاس زمانی سه ساعت، می‌توان از مدل فرکتال قطعه‌ای نیز برای تولید سیستم تابع تکرار یا از الگوریتم با تکرار تصادفی برای مدل‌سازی سری زمانی داده‌های روزانه دما استفاده نمود که تحقیق کارایی آن‌ها برای مدل‌سازی داده‌های دما توصیه می‌گردد.

منابع

1- Barnsley M.F. 1993. Fractals Everywhere. New York, Academic Press.

2- Chuanzhen L., Xiangdong G., and Shuping Sh. 2000. A speedup method for fractal encoding of digital signals.Proceedings of ICSP.1115-1118.

3- Marvasti M.A. and Strahle W.C. 1995. Fractal geometry analysis of turbulent data. Signal processing, 41: 191-201.

4- Mazel D.S. and Hayes M.H. 1992. Using itegrated function systems to model discrete sequences.IEEE Transactions on Signal Processing, 40 (7) :1724-1734.

5- Pathirana A. 2001. Fractal modeling of rainfall: downscaling in time and space for hydrological applications. Ph. D. Thesis. University of Tokyo, Japan.

6- Rehman Sh. 2009. Study of Saudi Arabian climatic conditions using Hurst exponent and climatic predictability index. Chaos, Solitons and Fractals, 39: 499-509.

7- Strahle W.C. and Jagoda I.J. 1989. Fractal geometry application in turbulent combustion data analysis. Georgia Institute of Technology. 561-568.

8- Xin-Fu L. and Xiao-Fan L. 2008. An explicit fractal interpolation algorithm for reconstruction of seismic data. Chin-Phys-Lett. 25(3).

9- Ziaei A.N., Keshavarzi A.R. and Emdad H. 2005. Fractal scaling and simulation of velocity components and turbulent shear stress in open channel flow. Chaos, Solitons and Fractals, ۲۴:1031-1045.

Journal of Water and Soil
Vol. 27, No. 6, Jan.-Feb. 2014, p. 1123-1132

نشریه آب و خاک (علوم و صنایع کشاورزی)
جلد ۲۷، شماره ۶، بهمن - اسفند ۱۳۹۲، ص. ۱۱۳۲-۱۱۲۳

Using Fractal Interpolation Functions for Temporal Downscaling of Temperature Data

N. Validi[1*] - A.N. Ziaei[2]- B. Ghahraman[3] – H. Ansari[4]
Received:13-01-2013
Accepted:22-12-2013

Abstract

For optimal management of a catchment, the time and space downscaling of hydrological properties is essential. To achieve accurate energy and water budget equations in every time or space resolution, spatial and temporal downscaled information of water budget's components are used. The fractal geometry is a branch of mathematics which has been utilized in discrete and periodic fields to generate data with different scales from observed data. In this research, the fractal interpolation functions were used for temporal downscaling of daily temperature data. The fractal dimension was used to express the rate of irregularities or fluctuations in the quatity. The fractal dimension of Mashhad daily temperature datasets for the period of 1992- 2007 was calculated. The mean of the fractal dimension was obtained 1.54. Moreover, using the fractal interpolation functions and the midday temperature dataset with 15 days resolution, hourly temperature dataset has been estimated and compared with observed dataset. It was shown that despite the considerable time interval between two consecutive measurements (as 15 days), the temperature time series with 3 hours resolution were obtained. The determination coefficient and the root mean square error of the model are 0.77 and 7, respectively.

Keywords: Iterated functions system, Collage theorem, Daily temperature, Downscaling, Fractal geometry

1,2,3,4- M.Sc. Student, Assistant Professor, Professor and Associate Professor, Department of Water Engineering, College of Agriculture, Ferdowsi University of Mashhad, Respectively
(*-Corresponding Author Email: N.Validi@ymail.com)