

آبریز آزاد دایره‌ای شکل با ارتفاع‌های مختلف پرشدگی در کف در رژیم‌های جریان فوق‌بحرانی و زیربحرانی

علی رضا وطن خواه^{۱*} - سجاد کیانی^۲ - صالح ریاحی^۳

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۱۱/۲۱

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۰۲/۱۳

چکیده

آبریز آزاد واقع در انتهای کانال‌های روباز، از ابزارهای ساده اندازه‌گیری دبی جریان است. هدف از این تحقیق، ارائه رابطه‌ای است که بتواند دبی جریان را برحسب عمق انتهایی آبریز محاسبه کند. در این پژوهش، بر مبنای معادله انرژی و با استفاده از دیدگاه سرریز لبه تیز با ارتفاع صفر، مدلی نظری به‌منظور برآورد دبی جریان در آبریز دایره‌ای شکل با ارتفاع‌های پرشدگی مختلف در کف برای رژیم‌های جریان زیربحرانی و فوق‌بحرانی ارائه شده است. بر این اساس، معادله کلی به جهت محاسبه دبی جریان برحسب عمق انتهایی آبریز برای ارتفاع‌های مختلف پرشدگی در رژیم جریان زیربحرانی پیشنهاد شده است. همچنین، در رژیم جریان فوق‌بحرانی با دانستن عمق انتهایی، شیب کف کانال و ارتفاع پرشدگی، دبی جریان از طریق نمودار گرافیکی محاسبه شده است. برای هر دو رژیم نتایج حاصل از تحقیق حاضر با نتایج داده‌های آزمایشگاهی دارای انطباق مناسب می‌باشد. معادله ارائه شده نیز دارای خطایی کمتر از ۱/۹۲ درصد می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: اندازه‌گیری جریان، توزیع فشار غیرهیدرواستاتیک، روش‌های عددی، عمق انتهایی، لبه‌آبریز دایره‌ای

مقدمه

لبه، انحنا سطح آب به تدریج کمتر شده به گونه‌ای که در فاصله‌ی کاملاً کوتاهی در بالادست لبه، شتاب قائم ناچیز شده و توزیع فشار هیدرواستاتیک می‌شود (در فاصله $x=L$ از لبه آبریز) لذا در رژیم‌های زیربحرانی و فوق‌بحرانی، عمق بالادست جریان به ترتیب برابر عمق بحرانی ($y_u=y_c$) و عمق نرمال ($y_u=y_0$) خواهد بود (۱). به دلیل متغیر بودن موقعیت y_u با تغییر شرایط جریان، لازم به استخراج روابط دبی جریان بر حسب عمق لبه آبریز (y_b) می‌باشد.

تحقیقات متعددی درباره‌ی آبریزها گزارش گردیده است. اولین تحقیق آزمایشگاهی توسط رأس (۱۱) بر روی یک کانال مستطیلی با شیب ملایم انجام شد که منجر به نتیجه $EDR=0/715$ (نسبت عمق انتهایی به عمق بحرانی) گردید. راجاراتنامو مورالیدهار (۱۰) نشان دادند که مقدار EDR در کانال دایره‌ای برای شرایطی که جریان زیر بحرانی است تقریباً مقدار ثابتی است. همچنین گزارش دادند که مقدار EDR جریان در حالت فوق‌بحرانی، تابع عدد فرود و شیب کانال می‌باشد. آن‌ها با به‌کارگیری معادله مومنتوم رابطه‌ای نظری برای کانال دایره‌ای شیب‌دار ارائه نمودند. علی و سایکس (۳) بر اساس تئوری ورتکس آزاد، مقدار EDR را برای مقاطع مثلثی، سهمی و مستطیلی شکل به ترتیب برابر $0/798$ ، $0/747$ و $0/678$ به‌دست آوردند. دی (۴) با استفاده از معادله مومنتوم تئوری

هنگامی که جریان در مقطعی از مسیر خود به‌طور ناگهانی سقوط می‌کند جریانی ریزشی ایجاد می‌شود که به‌عنوان آبریز شناخته می‌شود. این جریان به‌صورت یک جت آزاد به قسمت پایین فروافتادگی پرتاب می‌شود. چنین شرایطی مشابه حالت عبور جریان از روی سرریز لبه تیز با ارتفاع صفر است (۶). این سازه می‌تواند به‌عنوان یک وسیله اندازه‌گیری دبی جریان مورد استفاده قرار گیرد. نتایج آزمایشگاهی نشان داده است که عمق در محل آبریز (y_b) کمتر از عمق بحرانی در شرایط جریان زیر بحرانی و کمتر از عمق نرمال در شرایط جریان فوق‌بحرانی برای یک دبی خاص است. دلیل این امر تأثیر مؤلفه قائم شتاب (اثر شتاب ثقل) و به وجود آمدن توزیع فشار غیرهیدرواستاتیک در محل آبریز است (۶ و ۷). در قسمت بالادست

۱- دانشیار گروه مهندسی آبیاری و آبادانی، پردیس کشاورزی و منابع طبیعی، دانشگاه تهران

*- نویسنده مسئول: (Email: arvatan@ut.ac.ir)

۲- دانشجوی دکتری سازه‌های آبی، گروه مهندسی آب، دانشگاه شهید چمران اهواز

۳- دانشجوی دکتری سازه‌های آبی، گروه مهندسی آب، دانشگاه تربیت مدرس

بالادست (y_u) به دست می‌آید به طوری که دبی عبوری از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$dQ = \sqrt{2g(H-y)}^{0.5} T dy \quad (1)$$

که در آن، y عمق جریان، g شتاب ثقل، H همد کل و T عرض فوقانی جریان می‌باشد.

سطح مقطع جریان A ، عرض فوقانی جریان T و محیط خیس شده P نیز برابر است با:

$$A = 0.25d^2 \varphi_1 \quad (2)$$

$$T = 2d\varphi_2 \quad (3)$$

$$P = d\varphi_3 \quad (4)$$

در روابط فوق d قطر کانال است و توابع φ_1 ، φ_2 و φ_3 نیز از معادلات ۵ تا ۷ محاسبه می‌گردند:

$$\varphi_1 = \left(\begin{array}{l} [\arcsin(2\hat{\eta}-1)] + 2(2\hat{\eta}-1)[\hat{\eta}(1-\hat{\eta})]^{0.5} \\ -[\arcsin(2\hat{w}-1)] + 2(2\hat{w}-1)[\hat{w}(1-\hat{w})]^{0.5} \end{array} \right) \quad (5)$$

$$\varphi_2 = [\hat{\eta}(1-\hat{\eta})]^{0.5} \quad (6)$$

$$(7)$$

$$\varphi_3 = [2\sqrt{\hat{w}(1-\hat{w})} + \arccos(1-2\hat{\eta}) - \arccos(1-2\hat{w})]$$

در روابط فوق $\hat{\eta} = \hat{y} + \hat{w}$ ، $\hat{y} = y/d$ ، $\hat{w} = w/d$ در ارتفاع پرشدگی واقع در کف کانال می‌باشد. با جایگذاری روابط ذکرشده در معادله ۱، معادله دبی به صورت زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$Q = 2C_c d^2 \sqrt{2gH} \times \quad (8)$$

$$\int_0^{y_u} \frac{1}{d} \left[\left(1 - \frac{y}{H}\right) (\hat{\eta}(1-\hat{\eta})) \right]^{0.5} dy$$

که در آن، C_c ضریب فشردگی بوده و انحنای خطوط جریان را لحاظ می‌کند.

همچنین هد کل در مقطع کنترل بالادست ($x=L$) برابر است با:

(اندیس u اشاره به مقطع کنترل بالادست جریان دارد)

$$H = y_u + \frac{V_u^2}{2g} \quad (9)$$

که در آن V_u متوسط سرعت در مقطع بالادست است. مقدار عدد فرود در مقطع بالادست نیز برابر است با:

$$Fr_u = \frac{V_u}{\sqrt{gA_u/T_u}} \quad (10)$$

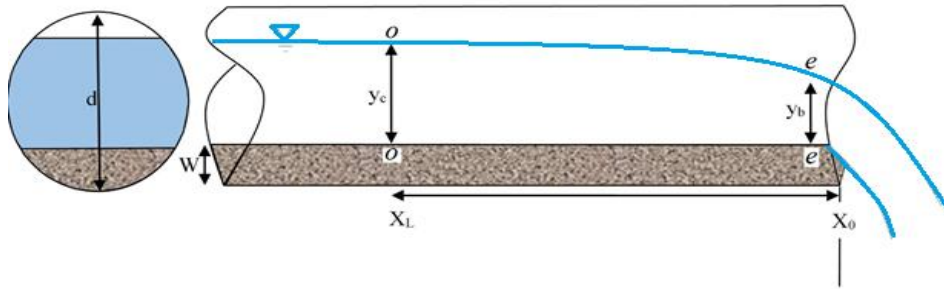
پس از جایگذاری معادله ۱۰ در معادله ۹ خواهیم داشت:

بوزینسک، مقدار EDR را برای کانال دایره‌ای شکل برابر با ۰/۷۵ گزارش کرد. دی (۵) با به کارگیری معادله انرژی در مقطع بحرانی و انتهای در کانال‌های نیم‌دایره‌ای معکوس (ارتفاع پرشدگی به قطر کانال برابر $w/d = 0.5$)، رابطه‌ای را بین دبی و عمق انتهایی بیان نمود و مقدار EDR در محدوده $0.42 < d/y_c < 0.705$ را برابر ۰/۷۰۵ به دست آورد. دی (۸) با انجام آزمایش روی یک فلوم نیم‌دایره‌ای به طول ۴ متر با سه قطر مختلف و ترکیب آن با معادله تحلیلی (مومتوم و تئوری بوزینسک)، مقدار EDR و دبی و پروفیل سطح آب را گزارش کرد. احمد (۱) با استفاده از معادله انرژی یک رابطه بی بعد بین دبی و عمق انتهایی در کانال نیم‌دایره‌ای معکوس ارائه نمود. احمد و عظمت الله (۲) برای مقطع دایره‌ای شکل، معادله‌ای تحلیلی به دست آوردند همچنین یک رابطه رگرسیونی به شکل نمایی برای دبی بی بعد و عمق انتهایی ارائه دادند. وطن خواه (۱۴) با حل دقیق معادله تحلیلی احمد (۲) برای مقاطع دایره‌ای شکل، بیان نمود که معادله رگرسیونی احمد ۱۲ درصد خطای نسبی با نتایج آزمایشگاهی داشته و با ارائه یک رابطه جدید میزان خطا را به ۰/۳۵ درصد رساند. نبوی و همکاران (۹) با ترکیب معادله مومتوم و تئوری ورتکس آزاد، توزیع فشار در لبه آبریز کانال‌های دایره‌ای و مقاطع سهمی شکل را محاسبه نمودند و روابطی بین EDR و دبی برای این اشکال با ارتفاع پرشدگی صاف مختلف (w) به دست آوردند.

روابط ارائه شده در مطالعات پیشین، منحصر به چهار ارتفاع پرشدگی نسبی ($\hat{w} = w/d$) صفر، ۰/۲۵، ۰/۳۳ و ۰/۵ بوده به طوری که برای هر یک از ارتفاع‌های پرشدگی، معادله‌ای مجزا ارائه شده است. در این تحقیق آبریز آزاد دایره‌ای شکل با ارتفاع‌های مختلف پرشدگی در کف بر اساس معادله انرژی و تئوری سرریز لبه تیز شبیه‌سازی شده است. هدف از این تحقیق ارائه رابطه‌ای جامع برای دبی بر اساس عمق انتهایی در رژیم جریان زیر بحرانی و فوق بحرانی برای آبریز دایره‌ای شکل با ارتفاع پرشدگی مختلف (w) در کف می‌باشد. همچنین بر اساس داده‌های آزمایشگاهی، دقت رابطه ارائه شده در این تحقیق ارزیابی شده و با معادلات سایر محققین مورد مقایسه قرار گرفته است.

مواد و روش‌ها

مطابق شکل ۱ جریان عبوری از روی آبریز می‌تواند مشابه جریان عبوری از روی سرریز لبه تیز با ارتفاع صفر در نظر گرفته شود (۱، ۶ و ۸). فرض می‌شود که فشار در مقطع ریزش جریان برابر فشار اتمسفر و خطوط جریان در مقطع انتهایی موازی می‌باشد. البته فرض اخیر توسط ضریب فشردگی اصلاح شده و خمیدگی خطوط جریان توسط ضریب فشردگی در محاسبات لحاظ خواهد شد. سرعت جریان در محل ریزش با نوشتن معادله انرژی بین مقطع انتهایی و مقطع کنترل



شکل ۱- نمایی از آبریز دایره‌ای با پرشدگی در کف کانال
Figure 1-Definition sketch of a flat-based circular channel

معادله ۱۷ یک معادله ضمنی بوده به طوری که برای محاسبه \hat{y}_b حساب \hat{y}_u باید از روش‌های عددی مثل نیوتن-رافسون استفاده نمود.

با استفاده از تعریف عدد فرود بحرانی می‌توان شکل بدون بعد ذبی را به صورت رابطه ۱۸ نوشت:

$$Q^* = \frac{Q}{g^{0.5} d^{2.5}} = \frac{1}{8\sqrt{2}} \frac{\varphi_{1,c}^{1.5}}{\varphi_{2,c}^{0.5}} \quad (18)$$

مطابق با معادلات ۱۷ و ۱۸، روابط بین Q^* و برای رژیم‌های جریان زیر بحرانی و فوق بحرانی به صورت زیر ارائه می‌شوند:

رژیم زیر بحرانی

زمانی که شیب کف کانال افقی یا کانال دارای شیب ملایم ($S < S_c$) باشد عمق جریان در مقطع کنترل (بالادست لبه آبریز، $x = -L$) برابر عمق بحرانی است ($y_u = y_c$)، بنابراین عدد فرود بالادست برابر یک می‌باشد ($Fr_u = 1$)، در نتیجه معادله ۱۷ در این حالت برابر است با:

$$\varphi_{1,b} = \frac{\varphi_{1,c}^{2.5}}{32\varphi_{2,c}^{0.5}\psi_c} \left[\hat{y}_c \left(1 + \frac{\varphi_{1,c}}{16\hat{y}_c\varphi_{2,c}} \right) \right]^{0.5} \quad (19)$$

در این تحقیق با حل معادلات ۱۸ و ۱۹ بر حسب عمق بحرانی (در محدوده $0.1 \leq \hat{y}_c \leq 0.84$)، معادله برازشی بین Q^* و به صورت رابطه ۲۰ پیشنهاد شده است:

$$Q^* = \left((1.1 - 1.945w_*^{4.9}) (\sin^{-1}\hat{y}_b)^{0.4275} + (2.1w_*^{5.4} + 0.104)\hat{y}_b - 0.003 \right)^{3.4} \quad (20)$$

محدوده $(0.06 - 0.6)$ است، استفاده نمود.

$$\frac{H}{d} = \hat{y}_u \left(1 + \frac{Fr_u^2 \varphi_{1,u}}{16\hat{y}_u \varphi_{2,u}} \right) \quad (11)$$

با تفکیک معادله ۸ به دو قسمت و بازنویسی آن خواهیم داشت:

$$Q = 2d^2 C_c \sqrt{2gH} \psi_u \quad (12)$$

$$\psi_u = \int_0^{\hat{y}_u} \left[\left(1 - \hat{y} \frac{d}{H} \right) (\hat{\eta}(1 - \hat{\eta})) \right]^{0.5} d\hat{y} \quad (13)$$

بخش انتگرالی معادله را می‌توان به کمک نرم‌افزارهای Matlab، Mathematica یا Mathcad محاسبه نمود. از طرفی با توجه به تعریف عدد فرود، ذبی Q به صورت زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$Q = Fr_u \frac{\sqrt{g} \varphi_{1,u}^{1.5}}{8\sqrt{2} \varphi_{2,u}^{0.5}} d^{2.5} \quad (14)$$

با جایگذاری معادله ۱۴ در معادله ۱۲ خواهیم داشت:

$$Fr_u = 32C_c \frac{\varphi_{2,u}^{0.5} H^{0.5}}{\varphi_{1,u}^{1.5} d^{0.5}} \psi_u \quad (15)$$

در معادله ۱۵، مقدار ضریب فشردگی C_c برابر است با: (اندیس b اشاره به مقطع انتهایی جریان دارد)

$$C_c = \frac{A_b}{A_u} = \frac{\varphi_{1,b}}{\varphi_{1,u}} \quad (16)$$

با جایگذاری معادله‌های ۱۱ و ۱۶ در معادله ۱۵ حاصل می‌شود:

$$\varphi_{1,b} = \frac{Fr_u \varphi_{1,u}^{2.5}}{32\varphi_{2,u}^{0.5}\psi_u} \left[\hat{y}_u \left(1 + \frac{Fr_u^2 \varphi_{1,u}}{16\hat{y}_u \varphi_{2,u}} \right) \right]^{-0.5} \quad (17)$$

به طوری که $w_* = 0.7 - \hat{w}$ است. معادله ۲۰ یک معادله برازشی دو متغیره است که می‌توان آن را به ازای مقادیری از \hat{w} که در

رژیم فوق بحرانی

$$Fr_u = \left(\frac{\varphi_{1,c}}{\varphi_{1,u}} \right)^{1.5} \left(\frac{\varphi_{2,u}}{\varphi_{2,c}} \right)^{0.5} \quad (21)$$

از ترکیب معادله مانینگ برای عمق نرمال و عمق بحرانی رابطه (۲۲) را خواهیم داشت:

$$Fr_u = \sqrt{S^*} \left(\frac{\varphi_{1,u}}{\varphi_{1,c}} \right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{\varphi_{2,u}}{\varphi_{2,c}} \right)^{0.5} \left(\frac{[2\sqrt{\hat{w}(1-\hat{w})} + \arccos(1-2\hat{\eta}_c) - \arccos(1-2\hat{w})]}{[2\sqrt{\hat{w}(1-\hat{w})} + \arccos(1-2\hat{\eta}_u) - \arccos(1-2\hat{w})]} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (22)$$

در رابطه فوق $S^* = S/S_c$

با برابر قرار دادن معادلات ۲۱ و ۲۲، خواهیم داشت:

$$S^* = \left(\frac{\varphi_{1,c}}{\varphi_{1,u}} \right)^{\frac{10}{3}} \left(\frac{[2\sqrt{\hat{w}(1-\hat{w})} + \arccos(1-2\hat{\eta}_u) - \arccos(1-2\hat{w})]}{[2\sqrt{\hat{w}(1-\hat{w})} + \arccos(1-2\hat{\eta}_c) - \arccos(1-2\hat{w})]} \right)^{\frac{4}{3}} \quad (23)$$

مقدار متوسط EDR به دست آمده از نتایج آزمایشگاهی دی، راجاراتنام، اسمیت و استرلینگ- نایت (۵، ۱۰، ۱۲ و ۱۳) برای ارتفاع‌های پرشدگی صاف مختلف و مقادیر به دست آمده از این پژوهش در جدول ۱ آورده شده است. برای نشان دادن اختلاف بین مقادیر محاسباتی و مشاهداتی از شاخص آماری متوسط قدر مطلق خطا^۱ (MAE) استفاده شده است.

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |P_i - O_i| \quad (24)$$

در رابطه‌ی فوق، P_i مقادیر محاسبه شده، O_i مقادیر اندازه‌گیری شده، و n تعداد نمونه‌ها می باشد.

در نمودارهای شکل ۳ همبستگی بین Q^* و \hat{y}_b برای پرشدگی‌های مختلف به انضمام نتایج آزمایشگاهی دی، راجاراتنام، اسمیت و استرلینگ- نایت (۵، ۱۰، ۱۲ و ۱۳) آورده شده است. با توجه به این نمودارها، مقادیر به دست آمده از معادله این پژوهش تطابق بسیار مناسبی با داده‌های آزمایشگاهی داشته و بنابراین می‌تواند برای استفاده کاربردی پیشنهاد گردد.

در جدول ۲ مقایسه‌ای بین روابط ارائه‌شده توسط محققین و دامنه کاربرد آن‌ها ارائه شده است. همانطور که از جدول ملاحظه می‌گردد روابط ارائه‌شده توسط محققین مختلف محدود به چند پرشدگی صاف (\hat{w}) بوده و نسبتاً طولانی و پیچیده می‌باشند. معادله ارائه‌شده در این پژوهش نسبتاً ساده بوده و دارای خطای نسبتاً کمی در دامنه کاربرد $0.06 \leq w/d \leq 0.06$ می‌باشد.

در شکل ۴ خطای نسبی معادلات برازشی محققین مختلف نسبت به حل عددی معادلات نظری پیشنهادی نشان داده شده است.

در رژیم جریان فوق بحرانی عمق جریان در مقطع بالادست لبه آبریز برابر عمق نرمال بوده ($y_u = y_0$) و مطابق با مطالعات انجام‌گرفته مقدار \hat{y}_b تابع عدد عمق بحرانی و شیب کانال می‌باشد (۷). اگر عدد فرود بالادست (Fr_u) از معادله ۱۴ بر عدد فرود بحرانی تقسیم شود:

از معادله ۲۳، مقدار \hat{y}_b برحسب مقادیر معلوم S^* و \hat{y}_c محاسبه می‌شود. سپس با استفاده از عدد فرود بالادست (Fr_u) به دست‌آمده از معادله ۲۱، مقدار \hat{y}_b از معادله ۱۷ محاسبه می‌شود.

نتایج و بحث

برای ارزیابی نتایج این تحقیق، از داده‌های آزمایشگاهی به دست آمده توسط محققین پیشین برای ارتفاع پرشدگی‌های مختلف استفاده شده است. بدین منظور برای رژیم زیربحرانی در کانال دایره‌ای از داده‌های آزمایشگاهی راجاراتنام و مورالیدهار (۱۰)، اسمیت (۱۲) و استرلینگ و نایت (۱۳)، برای کانال نیم دایره‌ای از آزمایشات دی (۵) و استرلینگ و نایت (۱۳) و برای ارتفاع‌های پرشدگی برابر ۰/۳۳ و ۰/۲۵ از آزمایشات استرلینگ و نایت (۱۳) استفاده شده است. همچنین رژیم فوق بحرانی، برای همه پرشدگی‌ها از آزمایشات استرلینگ و نایت (۱۳) استفاده شده است.

رژیم جریان زیربحرانی

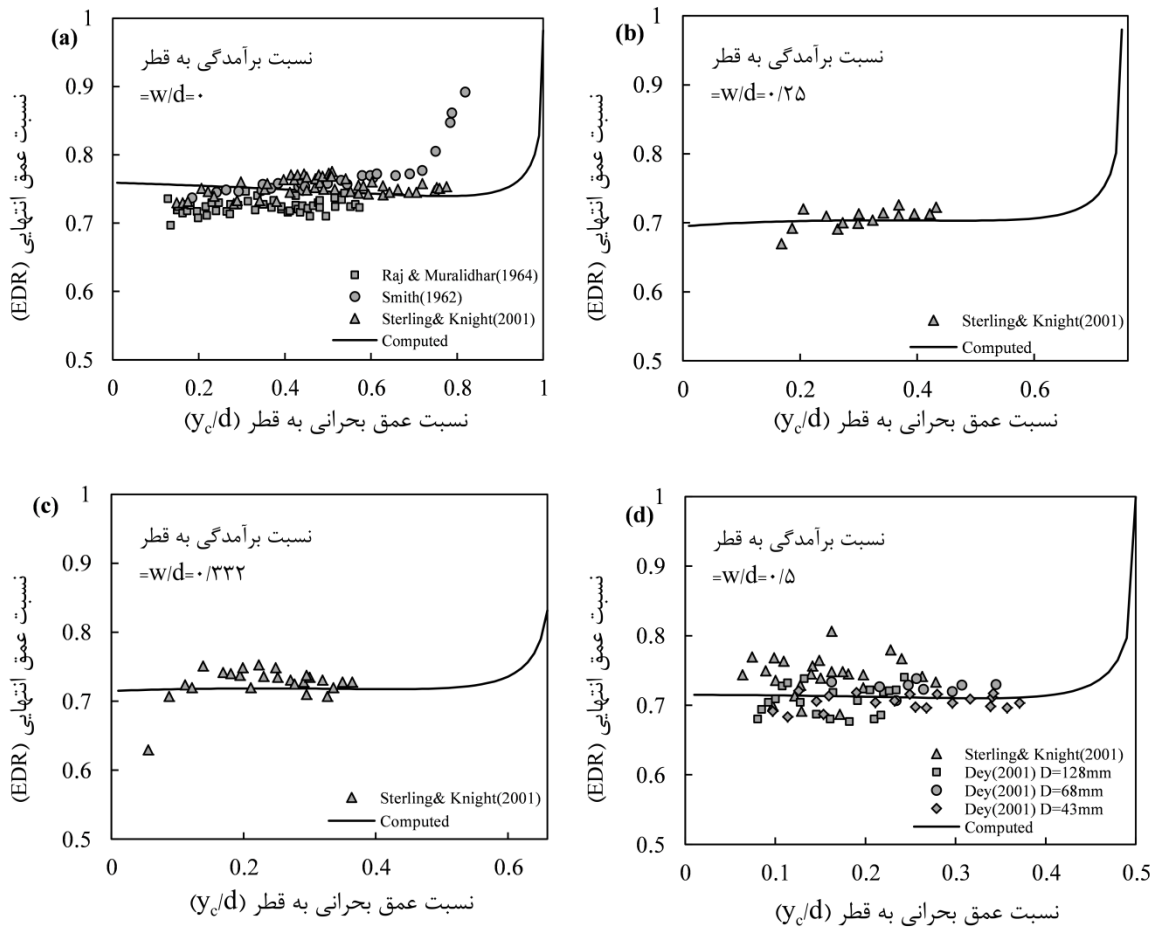
در شکل ۲، مقادیر EDR در مقابل برای معادله توسعه داده شده در این تحقیق (معادله ۱۹) و داده‌های آزمایشگاهی راجاراتنام، اسمیت و استرلینگ - نایت (۱۰، ۱۲ و ۱۳) نشان داده شده است. مطابق با این نمودارها، راجاراتنام، اسمیت و استرلینگ - نایت (۱۰، ۱۲ و ۱۳)، مقدار متوسط EDR برای $\hat{w}=0$ به ترتیب برابر ۰/۷۲۵، ۰/۷۴۳ و ۰/۷۷۲ تخمین زده‌اند. معادله ارائه‌شده در این پژوهش، مقدار متوسط EDR را برای ارتفاع پرشدگی صفر برابر ۰/۷۶ تخمین می‌زند. مقدار EDR برای ارتفاع‌های پرشدگی مختلف صفر، ۰/۲۵، ۰/۳۳ و ۰/۵ در نمودارهای شکل ۲ بر حسب \hat{y}_c نشان داده شده است.

مختلف \hat{w} ، S^* در تحقیق حاضر ارائه شده است. در جدول ۳ نیز مقایسه‌ای بین داده‌های محاسباتی تحقیق حاضر و داده‌های آزمایشگاهی استرلینگ (۱۳) انجام شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌گردد اختلاف ناچیزی بین داده‌های محاسباتی و آزمایشگاهی وجود دارد. دلیل این تفاوت می‌تواند به‌صرفه نظر کردن از هد استاتیک در معادله انرژی و استفاده از معادله مانینگ در محاسبات برای کانال‌های دایره‌ای کوچک آزمایشگاهی مربوط باشد. پارامتر آماری متوسط خطا به‌منظور مقایسه EDR آزمایشگاهی و محاسباتی در جدول ۴ ارائه شده است.

همان‌طور که از میزان خطاهای نشان داده‌شده در شکل مشخص می‌باشد، خطای نسبی معادله پیشنهادی در ارتفاع‌های پرشدگی (\hat{w}) ۰/۲۵، ۰/۳۳ و ۰/۵ نسبت به معادلات ارائه‌شده توسط محققین دیگر کمتر می‌باشد به طوری که بیشینه خطای نسبی معادله پیشنهادی در محدوده تعریف‌شده کمتر از ۱/۹۲ درصد است. همچنین برای ارتفاع پرشدگی صفر، معادله ارائه‌شده توسط وطن‌خواه (۱۴) از سایر روابط دقیق‌تر می‌باشد.

رژیم جریان فوق بحرانی

در نمودارهای شکل ۵ همبستگی بین Q^* و \hat{y}_c به ازای مقادیر

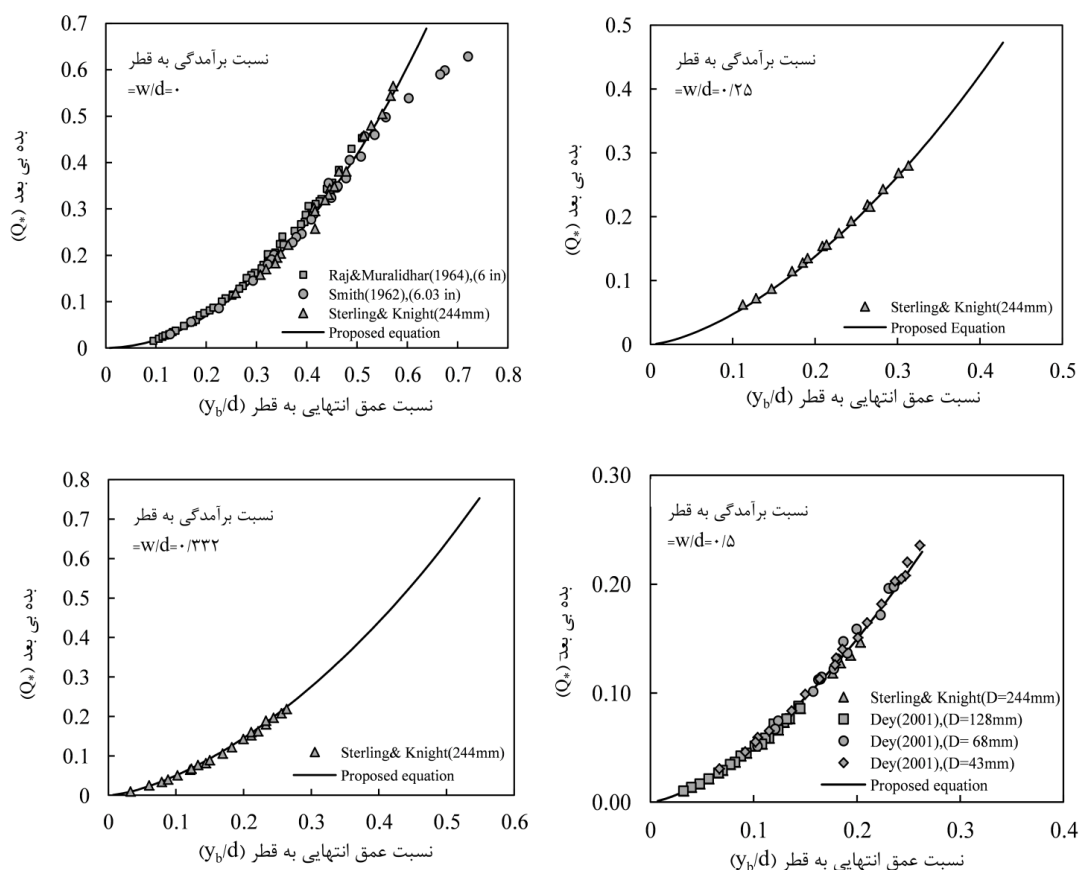


شکل ۲- تغییرات EDR با $\hat{y}_c = y_c/d$ در کانال‌های دایره‌ای با ارتفاع‌های پرشدگی کف مختلف

Figure 2-Variation of EDR with $\hat{y}_c = y_c/d$ in circular channels with different flat-based height

جدول ۱- مقایسه‌ی بین EDR آزمایشگاهی و EDR حاصل از تحقیق حاضر
Table 1- Comparison between experimental and computational values of EDR

\hat{W}	داده‌های آزمایشگاهی (experimental data)	متوسط EDR آزمایشگاهی (average values of experimental EDR)	متوسط EDR محاسباتی در تحقیق حاضر (average values of EDR obtained from presented equation in this study)	MAE (%)
0	اسمیت (Smith(1962))	0.772	0.76	1.55
	راجاراتنام (Rajaratnam(1964))	0.725		4.82
	استرلینگ-نایت (Sterling & knight(2001))	0.743		2.28
0.25	استرلینگ-نایت (Sterling & knight(2001))	0.706	0.703	0.42
0.332	استرلینگ-نایت (Sterling & knight(2001))	0.726	0.718	1.1
	دی (Dey(2001)) (D=۱۲۸ mm)	0.707		0.71
	دی (Dey(2001)) (D=۶۸ mm)	0.725		1.79
0.5	دی (Dey(2001)) (D=۴۳ mm)	0.705	0.712	0.99
	استرلینگ-نایت (Sterling & knight(2001))	0.743		4.17



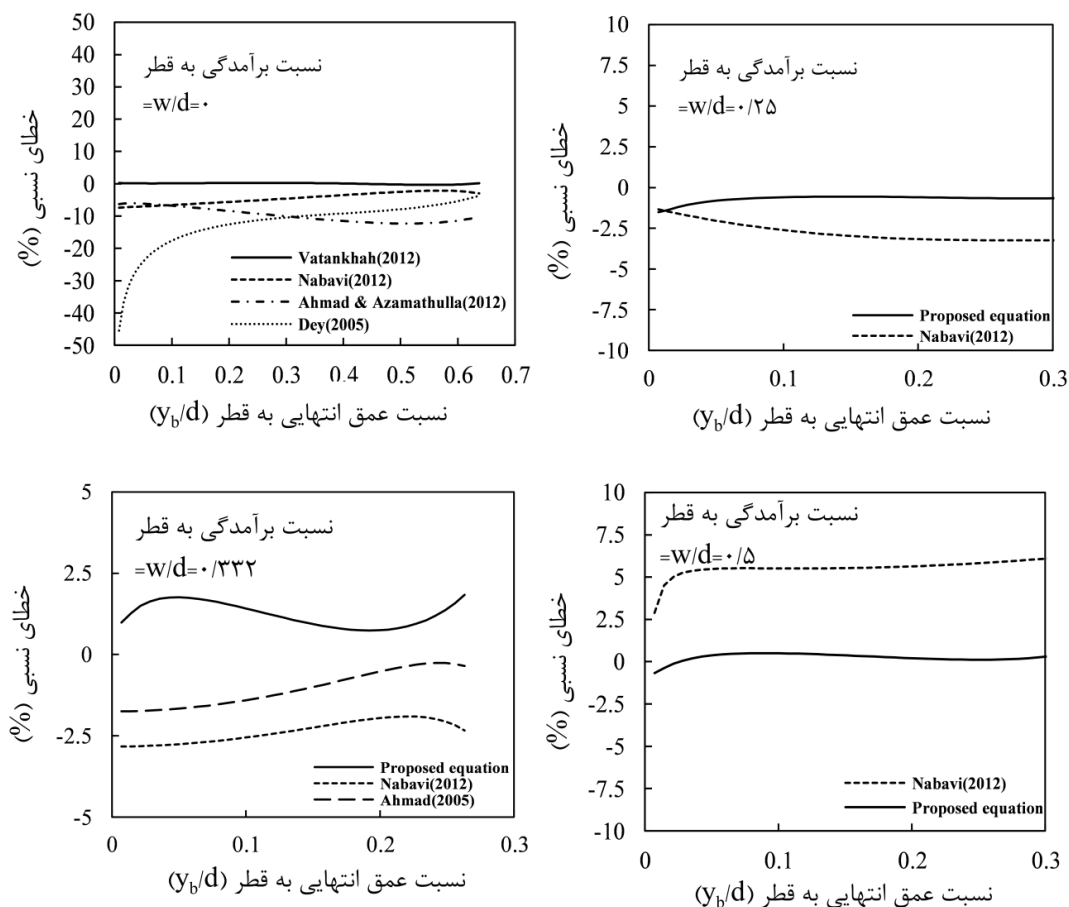
شکل ۳- تغییرات Q^* با y_b/d در کانال‌های دایره‌ای با رژیم جریان زیر بحرانی

Figure 3-Variation of Q^* with $\hat{y}_b = y_b/b$ in flat-based circular channels in subcritical flow regime

جدول ۲- مقایسه معادله پیشنهادی در این تحقیق و معادلات ارائه شده توسط محققین دیگر

Table 2- Comparison between proposed equations by previous researchers and one proposed in this study

w/d	محققین (researchers)	معادله دبی خروجی (Equations of the Q*)
	احمد و همکاران (Ahmad et al.(2012))	$1.866(y_b)^{1.995}$
	وطن خواه (Vatankhah(2012))	$[1.34\sin^{-1}(y_b) + 0.272y_b^{2.3}]^2$
0	نبوی و همکاران (Nabavi et al. (2011))	$\frac{\left[\sin^{-1}\left(\frac{8}{3}y_b - 1\right) + \frac{\pi}{2} + \left(\frac{8}{3}y_b - 1\right)\sqrt{\frac{8}{3}y_b\left(2 - \frac{8}{3}y_b\right)} \right]^{1.5}}{8\left[\frac{8}{3}y_b\left(2 - \frac{8}{3}y_b\right)\right]^{0.25}}$
	دی (Dey(2001))	$1.69(y_b)^{1.91}$
0.25	نبوی و همکاران (Nabavi et al. (2011))	$\frac{\left[\sin^{-1}(2.82y_b - 0.5) + \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} + (2.82y_b - 0.5)\sqrt{1 - (2.82y_b - 0.5)^2} \right]^{1.5}}{8\left[1 - (2.82y_b - 0.5)^2\right]^{0.25}}$
0.332	نبوی و همکاران (Nabavi et al. (2011))	$\frac{\left[\sin^{-1}(2.68y_b - 0.336) + 0.66 + (2.68y_b - 0.336)\sqrt{1 - (2.68y_b - 0.336)^2} \right]^{1.5}}{8\left[1 - (2.68y_b - 0.336)^2\right]^{0.25}}$
0.5	احمد (Ahmad(2005))	$\frac{[\sin^{-1}(2.85y_b) + 2.85y_b\sqrt{1 - 8.116y_b^2}]^{1.5}}{8(1 - 8.116y_b^2)^{\frac{1}{4}}}$
0.5	نبوی و همکاران (Nabavi et al. (2011))	$\frac{[\sin^{-1}(2.85y_b) + 2.85y_b\sqrt{1 - 8.116y_b^2}]^{1.5}}{8\left[1 - 8.116y_b^2\right]^{0.25}}$
$0.6 \leq w/d \leq 0.06$	معادله پیشنهادی (Proposed equation)	$Q^* = \left((1.1 - 1.945w_*^{4.9})(\sin^{-1}\hat{y}_b)^{0.4275} + (2.1w_*^{5.4} + 0.104)\hat{y}_b - 0.003 \right)^{3.4}$ $w_* = 0.7 - \hat{w}$

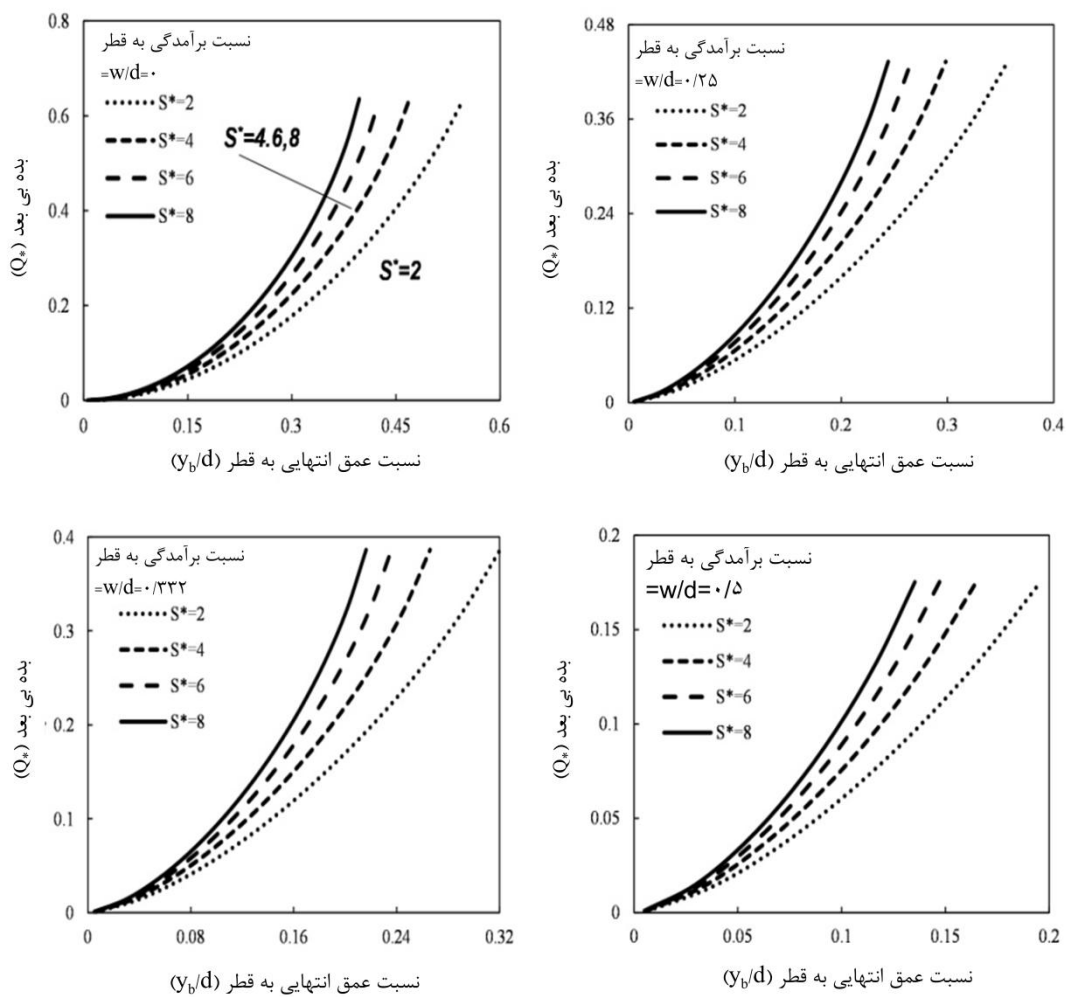


شکل ۴- مقایسه درصد خطای نسبی بین حل عددی معادلات نظری پیشنهادی و معادلات برازشی توسط محققین مختلف
 Figure 4- Error comparison between proposed and other regression-based equations compared with their exact numerical results obtained from their proposed theoretical models

جدول ۱- مقایسه بین نتایج محاسباتی و آزمایشگاهی

Table 3-Comparison between computational and experimental results

\hat{w}	\hat{y}_c	S^*	EDR آزمایشگاهی (Experimental values of EDR)	EDR محاسباتی (Computational values of EDR)	Q^* آزمایشگاهی (Experimental values of Q^*)	Q^* محاسباتی (Computational values of Q^*)
0	0.233	2.487	0.666	0.698	0.0565	0.0563
0	0.332	2.509	0.649	0.692	0.1118	0.1121
0	0.474	2.347	0.676	0.69	0.2226	0.2222
0	0.386	4.279	0.61	0.63	0.1501	0.1499
0	0.495	4.002	0.604	0.628	0.2412	0.2414
0.25	0.246	1.214	0.711	0.708	0.1138	0.114
0.25	0.45	1.958	0.721	0.652	0.2984	0.2983
0.25	0.478	1.775	0.723	0.662	0.3296	0.3296
0.25	0.529	1.47	0.719	0.682	0.3911	0.3915
0.25	0.497	1.657	0.718	0.669	0.3477	0.3519
0.33	0.169	1.824	0.736	0.666	0.0673	0.0674
0.33	0.193	1.484	0.749	0.686	0.0825	0.0826
0.33	0.228	1.162	0.757	0.707	0.1064	0.1067
0.33	0.307	1.638	0.738	0.673	0.1694	0.1692
0.33	0.303	1.667	0.724	0.671	0.1661	0.1657
0.5	0.354	1.264	0.761	0.686	0.2171	0.2171
0.5	0.067	3.162	0.617	0.604	0.0172	0.0173
0.5	0.157	3.271	0.659	0.589	0.0621	0.0622
0.5	0.206	3.086	0.59	0.59	0.0934	0.0937
0.5	0.287	2.59	0.57	0.6	0.1553	0.1553



شکل ۵- تغییرات Q^* با y_b/d در کانال دایره‌ای در رژیم فوق بحرانی

Figure 5- Variation of Q^* with y_b/d in flat-based circular channels in supercritical flow regime

جدول ۴- مقایسه متوسط خطای EDR محاسباتی و آزمایشگاهی

Table 4- Comparison between computational and experimental error values of EDR

\hat{w}	MAE (%)
0	3.4
0.25	6
0.332	7
0.5	5.7

مختلف با استفاده از معادله انرژی بر اساس سرریز لبه تیز محاسبه گردید. در نهایت برای رژیم جریان زیر بحرانی یک معادله برازشی کلی برای محاسبه دبی جریان بر اساس عمق انتهایی برای ارتفاع‌های پرشدگی صاف مختلف ارائه گردید که بیشینه خطای نسبی آن نسبت به حل عددی مدل نظری کمتر از ۱/۹۲ درصد می‌باشد.

نتیجه گیری کلی

در این پژوهش از یک روش ساده برای تعیین دبی جریان در آبریز دایره‌ای شکل استفاده شده است به طوری که رابطه بین دبی جریان و عمق انتهایی برای کانال‌های دایره‌ای با ارتفاع‌های پرشدگی

داده‌های آزمایشگاهی برای رژیم‌های زیربحرانی و فوق‌بحرانی به ترتیب کمتر از ۵ درصد و ۷ درصد است بنابراین برای استفاده در کارهای عملی پیشنهاد می‌گردد.

همچنین برای رژیم جریان فوق‌بحرانی، دبی جریان را می‌توان بر اساس عمق انتهایی به صورت مستقیم از نمودارهای گرافیکی ارائه شده محاسبه نمود. متوسط خطا (MAE) مدل نظری ارائه شده نسبت به

منابع

- 1- Ahmad Z. 2005. Flow measurement using free overfall in inverted semicircular channel. *Flow Measurement and Instrumentation*, 16:21–26.
- 2- Ahmad Z., Azamathulla H.M.d. 2012. Direct solution for discharge in circular free overfall. *Journal of Hydrology*, 446:116–120.
- 3- Ali K.H.M., Sykes A. 1972. Free-vortex theory applied to free overfall, *Journal of Hydraulic Division ASCE*, 98:973–979.
- 4- Dey S. 1998. End-depth in circular channels. *Journal of Hydraulic Engineering*, 124(8):856–863.
- 5- Dey S. 2001. Flow measurement by the end-depth method in inverted semicircular channels. *Flow Measurement and Instrumentation*, 12(4):253–258.
- 6- Dey S. 2001. EDR in circular channels. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 127(2):110-112
- 7- Dey S. 2002. Free overfall in circular channels with flat base: a method of open channel flow measurement. *Flow Measurement and Instrumentation*, 13(5): 209–221.
- 8- Dey S. 2003. Free overfall in inverted semicircular channels. *Journal of Hydraulic Engineering*, 129(6):438–447.
- 9- Nabavi S.V., Beirami M., and Chamani M., et al. 2011. Free overfalls in flat-based circular and Ushaped channels. *Flow Measurement and Instrumentation*, 22(1):17–24.
- 10- Rajaratnam N., Muralidhar D. 1964. End-depth for circular channels. *Journal of Hydraulic Division ASCE*, 90:199–119.
- 11- Rouse H. 1936. Discharge characteristics of the free overfall. *Civil Engineering*, 6:257–260.
- 12- Smith C.D. 1962. Brink depth for a circular channel. *Journal of Hydraulic Division ASCE*, 88:125–134.
- 13- Sterling M., Knight D.W. 2001. The free overfall as a flow measuring device in a circular channel. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers. Waters and Maritime Engineering*, 148(4): 235–243.
- 14- Vatankhah A.R. 2012. Comment on Direct solution for discharge in circular free overfall. *Journal of Hydrology*, 466:185–187.

The Free Overfall in Circular Sections with Different Flat Base in Supercritical and Subcritical Flow Regimes

A.R. Vatankhah^{1*} - S. Kiani² - S. Riahi³

Received:10-02-2014

Accepted:03-05-2015

Introduction: A free overfall offers a simple device for flow discharge measuring by a single measurement of depth at the end of the channel y_b which is known as the end depth or brink depth. When the bottom of a channel drops suddenly, the flow separates from sharp edge of the brink and the pressure distribution is not hydrostatic because of the curvature of the flow. In channels with subcritical flow regime, control section occurs at the upstream with a critical depth (y_c). Although pressure distribution at the critical depth is hydrostatic, the location of the critical depth can vary with respect to the discharge value. So, the end depth at brink is offered to estimate the discharge. A unique relationship between the brink depth (y_b) and critical depth (y_c), known as end-depth ratio ($EDR = y_b/y_c$), exist. Since a relationship between the discharge and critical depth exists, the discharge can ultimately be related to y_b . However, when the approaching flow is supercritical, critical section does not exist. Therefore, the discharge will be a function of end depth and channel longitudinal slope.

In current study, an analytical model is presented for a circular free overfall with different flat base height in subcritical and supercritical flow regimes. The flow over a drop in a free overfall is simulated by applying the energy to calculate the EDR and end depth-discharge (EDD) relationship.

End-depth-discharge relationship: The flow of a free overfall in a channel can be assumed that is similar to the flow over a sharp-crested weir by taking weir height equal to zero. It is assumed that pressure at the end section is atmospheric, and also streamlines at the end section are parallel. To account for the curvature of streamlines, the deflection of jet due to gravity, the coefficient of contraction, C_c , is considered. At a short distance upstream the end section, the pressure is hydrostatic. By applying the energy equation between end section and control section which is at upstream the end section, the flow depth at the end of the channel y_b in terms of depth at the control section can be determined.

Subcritical flow regime: In this case, the approach flow to the brink is subcritical for negative, zero and mild bed slopes with critical depth at the control section. Using the definition of the Froude number at critical depth, the discharge can be determined. As the explicit relationship between discharge and depth at the brink don't exist, a relationship should be presented through regression analysis between discharge and y_b using the different values of y_c over the practical range of 0.01 to 0.84. In this study, below explicit equation is presented for computing Q^* (dimensionless discharge) in terms of \hat{y}_b ($\hat{y} = y/d$):

$$Q^* = \left([1.1 - 1.945(w^*)^{4.9}] (\sin^{-1} \hat{y}_b)^{0.4275} + [2.1(w^*)^{5.4} + 0.104] \hat{y}_b - 0.003 \right)^{3.4}$$

Where d is channel diameter, $\hat{w} = w/d$ is the ratio of bottom elevation to the channel diameter and $w^* = 0.7 - \hat{w}$. This equation can be used for different values of w^* over the practical range of 0.06–0.6.

Supercritical flow regime: A critical flow occurs upstream of the free overfall under the subcritical approach flow. However, no such critical flow occurs in the vicinity of the overfall under supercritical flow regime. Therefore, the Manning equation for known value of channel bed slope and Manning's coefficient is exercised to derive the discharge relationship under the supercritical flow regime. Since an explicit equation for discharge in term of y_b is impossible, a direct graphical solution for discharge for known end depth, channel bed slope, and ratio of bottom elevation has been provided for supercritical flow regime.

Conclusion: The free overfall in a circular channel with flat base has been simulated by the flow over a sharp-crested weir to calculate the end-depth ratio. This method also eliminates the need of an empirical pressure coefficient. The method estimates the discharge from the known end-depth. In subcritical flows, the EDR has been related to the critical-depth. On the other hand, in supercritical flows, the end-depth has been expressed as a function of the longitudinal slope of the channel using the Manning equation. The mathematical solutions allow

1- Associate Professor, Department of Irrigation and Reclamation Engineering, College of Agriculture and Natural Resources, University of Tehran

(*-Corresponding Author Email: arvatan@ut.ac.ir)

2- PhD Student of Water Structures, Department of Water Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz

3- PhD Student of Water Structures, Department of Water Engineering, Tarbiat Modares University

estimation of discharge from the known end-depth in subcritical and supercritical flows. The comparisons of the experimental data with this model have been satisfactory for subcritical flows and acceptable for supercritical flows.

Keywords: Circular overfall, End-depth, Flow measurement, Non-hydrostatic pressure distribution, Numerical methods