

## کاربرد توابع مفصل ارشمیدسی و حدی در تحلیل چند متغیره جریان‌های کمینه حوضه آبریز دز

فرشاد احمدی<sup>۱</sup> - فریدون رادمنش<sup>۲\*</sup> - غلامعلی پرهام<sup>۳</sup> - رسول میرعباسی نجف آبادی<sup>۴</sup>

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۶/۲۸

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۲۱/۰۱

### چکیده

تحلیل فراوانی جریان‌های کمینه به منظور برنامه‌ریزی جهت تامین نیازهای مختلف، مدیریت کمی و کیفی جریان رودخانه و بررسی خصوصیات و تاثیر خشکسالی‌ها بر اکوسیستم آبی منطقه از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. با وجود ماهیت پیچیده کم‌آبی‌ها اکثراً از روش‌های تک متغیره به منظور تحلیل فراوانی جریان‌های کمینه استفاده شده است. در این مطالعه جریان‌های کمینه حوضه آبریز دز در دوره آماری ۱۳۹۱-۱۳۳۵ با استفاده از توابع مفصل در محل اتصال سرشاخه‌ها مورد بررسی قرار گرفت. بدین منظور ابتدا سری‌های هفت روزه جریان کمینه در ایستگاه‌های مورد مطالعه استخراج و سپس همگنی آنها با استفاده از آزمون من-کندال بررسی شد. نتایج نشان داد که سری‌های جریان کمینه هفت روزه حوضه آبریز دز همگن بود. در مرحله بعد، ۱۱ تابع توزیع مختلف به داده‌های جریان کمینه برازش داده شد و در نهایت توزیع لجستیک به عنوان توزیع حاشیه‌ای مناسب ایستگاه‌های مورد مطالعه انتخاب گردید. پس از انتخاب توزیع حاشیه‌ای، از توابع مفصل خانواده‌های ارشمیدسی و حدی برای تحلیل فراوانی توام جریان کمینه هفت روزه استفاده شد. نتایج نشان داد که مفصل کامل - هوگارد برای جفت داده‌های ایستگاه‌های سپید دشت سزار و سپید دشت زاز بیشترین تطابق را با تابع مفصل تجربی داشته است. برای بررسی دوره بازگشت وقایع در حالت توام، از دوره بازگشت توام در دو حالت «یا» و «و» دوره بازگشت توام شرطی استفاده شد. براساس نتایج به دست آمده از تحلیل توام جریان کمینه دو سرشاخه متصل به هم مشخص شد که دو رودخانه سپید دشت سزار و سپید دشت زاز به طور متوسط هر ۲۰۰ سال یکبار به صورت هم‌زمان می‌تواند در معرض خشکسالی شدید قرار گیرد.

**واژه‌های کلیدی:** توزیع حاشیه‌ای، دوره بازگشت توام، دوره بازگشت شرطی، مفصل تجربی، همگنی

### مقدمه

وضعیت اقلیمی ممکن است رخ دهد (۱۱). توصیف زمانی و مکانی این پدیده بسیار مشکل است. خشکسالی دارای انواع مختلفی می‌باشد که می‌توان آن را به خشکسالی هواشناسی، هیدرولوژیکی، کشاورزی و اقتصادی - اجتماعی تقسیم‌بندی نمود (۱۱). خشکسالی هیدرولوژیکی با کاهش قابل توجه آب در دسترس در همه اشکال آن در چرخه هیدرولوژیکی در یک سرزمین تعریف می‌شود. این اشکال در متغیرهای متنوع هیدرولوژیکی مانند جریان رودخانه‌ای (مشمتمل بر آب حاصل از برف و جریان بهاره)، سطح دریاچه، مخزن و همچنین سطح آب‌های زیرزمینی منعکس می‌شوند. در بین این متغیرها، جریان رودخانه‌ای یک متغیر بسیار مهم بوده و عامل کلیدی برای بیان کردن وضعیت منابع آب سطحی می‌باشد. از این رو خشکسالی هیدرولوژیکی به کاهش و کسری جریان رودخانه‌ای نسبت به حالت نرمال بستگی دارد (۱۳).

یکی از شاخص‌های مهم در تحلیل جریان رودخانه‌ها شاخص جریان کم می‌باشد. برآورد آمار و ارقام جریان کم برای مطالعات مختلف هیدرولوژی از قبیل مدیریت کیفیت آب، تعیین حداقل جریان

در چند دهه اخیر افزایش تقاضای آب به دلیل افزایش جمعیت و گسترش صنعت باعث گردیده تا مباحث مرتبط با توسعه منابع آب و استفاده بهینه از آنها بیش از پیش مورد توجه محققان قرار گیرد. این مسئله به خصوص در سال‌های خشک که میزان آب‌های سطحی به حداقل مقدار خود می‌رسد، حادث است. خشکسالی از مزمن‌ترین و زیان‌بارترین بلاهای طبیعی است که در اقلیم‌های مختلف، از نواحی با آب و هوای مرطوب گرفته تا نواحی با آب و هوای خشک و نیمه‌خشک اتفاق می‌افتد و آثار آن به دلیل نقش اساسی منابع آب در فعالیت‌های انسانی بسیار روشن است. در یک تعریف کلی، خشکسالی وضعیتی از کمبود بارندگی و افزایش دما قلمداد شده که در هر

۱ و ۲- دانشجوی دکتری و دانشیار مهندسی منابع آب، دانشگاه شهید چمران اهواز (\*- نویسنده مسئول: Email: Feridon\_radmanesh@yahoo.com)

۳- استاد گروه آمار، دانشگاه شهید چمران اهواز

۴- استادیار گروه مهندسی آب، دانشگاه شهرکرد

تحلیل جریانان کمینه و بیشینه هفت روزه حوضه آبریز رودخانه پرل<sup>۱</sup> در چین بهره جستند. نتایج این محققان نشان داد که احتمال اینکه خشکسالی و سیلاب در دو رودخانه متصل به هم مورد مطالعه به صورت همزمان رخ دهد، بسیار ناچیز می باشد. همچنین نتایج نشان داد که احتمال وقوع خشکسالی یا سیل شدید در حوزه رودخانه پرل، به علت اثرات ترکیبی جریانان کمینه یا بیشینه دو شاخه غربی و شمالی، ناچیز می باشد. هرچند احتمال وقوع جریانان حدی در هریک از شاخه ها بصورت انفرادی بالا بود.

با توجه به پیشینه پژوهش مشاهده می شود که تاکنون مطالعه جامعی در خصوص تحلیل چندمتغیره جریانان کمینه در حوضه آبریز دز انجام نشده است. از این رو هدف از مطالعه حاضر توسعه یک مدل احتمالاتی مبتنی بر مفصل برای تحلیل چندمتغیره جریان کمینه هفت روزه حوضه آبریز دز می باشد. بنابراین اهداف مطالعه حاضر عبارتند از: الف) بررسی قابلیت های توابع مفصل در ایجاد توابع توزیع دو متغیره برای جریان کمینه هفت روزه در حوزه آبریز دز، ب) انتخاب بهترین تابع مفصل مناسب دو بعدی براساس تحلیل خطا<sup>۲</sup> و ج) بررسی رفتار احتمالاتی توام رویدادهای جریان کم در این حوضه.

## مواد و روش ها

### داده ها و منطقه مورد مطالعه

شکل (۱) موقعیت حوضه آبریز دز را در کشور نشان می دهد. حوضه دز از لحاظ موقعیت جغرافیایی بین ۴۸ درجه و ۱۰ دقیقه تا ۵۰ درجه ۲۱ دقیقه طول شرقی و ۳۱ درجه و ۳۴ دقیقه تا ۳۴ درجه ۷ دقیقه عرض شمالی محدود است. مساحت کل حوضه بالغ بر ۲۱۷۲۰ کیلومتر مربع و متوسط ارتفاع حوضه حدود ۱۶۰۰ متر می باشد. محدوده مورد مطالعه در این تحقیق حوضه آبریز دز در بالادست سد دز است که مساحت آن حدود ۱۷۳۶۵ کیلومتر مربع می باشد. شیب حوضه در بالادست سد نسبتاً تند است، بطوریکه شیب متوسط آن ۱۲/۱ درصد بوده و ده درصد حوضه شیبی بیشتر از ۱۹/۵ درصد دارد. پوشش گیاهی در ارتفاعات پایین حوضه کم بوده و با افزایش ارتفاع، این پوشش زیادتر می گردد. همان گونه که شکل (۱) نشان می دهد، جهت جریان در حوضه آبریز دز از سمت شمال به جنوب است. رودخانه دز در ابتدا از اتصال دو شاخه اصلی رودخانه تیره و سیلاخور شروع شده و با اضافه شده سرشاخه ماربره رودخانه سپید دشت- سزار تشکیل می شود. از به هم پیوستن دو رودخانه سپید دشت- سزار و سپید دشت- زاز رودخانه سزار شروع شده و نهایتاً رودخانه دز در محلی به نام تنگ پنج در اعماق رشته کوه زاگرس، از تلاقی دو رودخانه سزار و بختیاری تشکیل می شود. به منظور آنالیز فراوانی توام

آبی مورد نیاز در پایین دست برای تولید برق و خنک سازی، طراحی آبیگرها، پرورش آبزیان، طراحی سیستم های آبیاری و ارزیابی تاثیر خشکسالی های طولانی مدت بر روی اکوسیستم های آبی ضروری است (۱۲). جریان های کم آبی معمولاً به روش نمایه های کم آبی قابل تعیین است. نمایه های کم آبی انواع مختلف دارد که در بین آنها نمایه های هفت روزه با دوره های بازگشت مختلف بیشترین کاربرد را دارند (۲۰). بطوری که اکثر ضوابط حاکم بر جریان های زیست محیطی و برنامه ریزی کیفی جریان رودخانه براساس جریان کمینه هفت روزه می باشد بطور مثال در مباحث زیست محیطی برای تعیین حداکثر غلظت مجاز آلاینده ها و رسوبات از این نمایه استفاده می شود (۲۰).

به طور کلی مطالعات فراوانی در ارتباط با تحلیل تک متغیره جریانان کمینه رودخانه ها انجام شده است که می توان به تحقیقات کادری (۷)، ساندوال (۱۷) و شی و همکاران (۱۸) اشاره نمود. با توجه به تحقیقاتی نظیر ژانگ و همکاران (۲۴) می توان جریانان کمینه را در دور رودخانه به صورت توامان مورد بررسی قرار داده و از این رو تحلیل جامع و دقیق این وقایع، مسلماً نیازمند تحلیل فراوانی چند متغیره خواهد بود. جدیدترین روش ارائه شده برای تحلیل چند متغیره پدیده های هیدرولوژیک، اولین بار توسط اسکالر معرفی و به نام تابع مفصل شناخته می شود (۱۹). توابع مفصل، محدودیت های توابع توزیع دو متغیره را نداشته و می تواند با پیوند دادن توابع توزیع حاشیه ای تک متغیره متفاوت، توابع توزیع چند متغیره را ایجاد و با استفاده از آنها ساختارهای وابستگی را به شکل دقیق تری توصیف نمایند (۱۶).

در دهه های اخیر، مفصل با عنوان یک ابزار کارآمد برای کمی کردن ساختار وابستگی بین کمیت های همبسته معرفی شده اند. انعطاف پذیری ارائه شده توسط مفصل ها برای ایجاد توابع های توأم در مطالعات زیادی به اثبات رسیده است. فاور و همکاران (۴) مفصل ها را برای تحلیل فراوانی سیلاب چندمتغیره برای دو حوضه در کبک کانادا بکار برده و دی میچله و همکاران (۱) از خانواده گامبل مفصل- های ارشمیدسی برای مدل کردن وابستگی بین حداکثرهای سیلاب و حجم های سیلاب استفاده نمودند. ژانگ و سینگ نیز (۲۳) ساختار وابستگی بین حداکثر سیلاب، حجم و مدت را با آزمودن چهار خانواده مختلف از مفصل های ارشمیدسی شامل گامبل- هوگارد، علی- میخائیل- حق، فرانک و کوک- جانسون مورد بررسی قرار دادند. کاربردهای دیگر مفصل ها در تحلیل فراوانی سیلاب را می توان در مطالعات مددگر و مرادخانی (۹)، سعد و همکاران (۱۵) و مینگ و همکاران (۱۰) یافت. در زمینه کاربرد توابع مفصل برای مدل کردن جریانان کم، تاکنون مطالعات اندکی انجام شده است که از آن جمله می توان به ژانگ و همکاران (۲۴) اشاره نمود که از توابع مفصل برای

1 - Pearl

2 - Error Analysis

مدل برازشی، جذر میانگین مربعات نرمال شده خطاها (NRMSE) (رابطه ۱) و معیار نش- ساتکلیف (رابطه ۲) محاسبه می‌شود. هر کدام از توزیع‌های برازشی که بیشترین مقدار معیار نش- ساتکلیف (NS) و کمترین NRMSE را داشته باشند، به عنوان مناسب‌ترین توزیع حاشیه‌ای جریان‌های کمینه ۷ روزه حوضه آبریز دز برگزیده می‌شود.

$$NRMSE = 100 \times \frac{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (S_i - O_i)^2}}{O_{\max} - O_{\min}} \quad (1)$$

$$NS = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (S_i - O_i)^2}{\sum_{i=1}^n (O_i - \bar{O})^2} \quad (2)$$

که در روابط فوق،  $n$  تعداد داده‌ها،  $O_i$  مقدار نمونه مشاهده شده،  $O_{\max}$  و  $O_{\min}$  به ترتیب حداکثر و حداقل نمونه‌های مشاهده شده،  $\bar{O}$  میانگین مقادیر نمونه و  $S_i$  مقدار خروجی تابع توزیع مورد آزمون برای مقدار احتمال تجربی هر مقدار نمونه می‌باشد.

### توابع مفصل و تئوری اسکالر

مفصل‌ها یک شیوه انعطاف پذیر برای ایجاد توزیع‌های توأم آماری با توابع توزیع حاشیه‌ای متفاوت می‌باشند. در واقع، مفصل تابعی است که توابع توزیع حاشیه‌ای تک متغیره را برای تشکیل یک تابع توزیع دو یا چندمتغیره، به هم پیوند می‌دهد. مفصل‌ها توابع توزیع چندمتغیره هستند که حاشیه‌های یک بعدی آنها بر بازه  $(0, 1)$  یکنواخت باشند. معرفی و ارائه مفصل به اسکالر (۱۹) نسبت داده شده است که در یک تئوری توصیف می‌کند چگونه توابع توزیع تک متغیره می‌تواند به فرم توزیع‌های چندمتغیره ترکیب شوند. اسکالر نشان داد که برای متغیرهای تصادفی پیوسته  $d$  بعدی  $\{X_1, \dots, X_d\}$  با CDFهای حاشیه‌ای  $u_j = F_{X_j}(x_j)$  که  $d=1, \dots, d$ ، یک مفصل  $d$  بعدی یکتای  $C_{U_1, \dots, U_d}$  وجود دارد به طوری که:

$$C_{U_1, \dots, U_d}(u_1, \dots, u_d) = H_{X_1, \dots, X_d}(x_1, \dots, x_d) \quad (3)$$

که در آن،  $u_j$ ،  $j$  امین حاشیه و  $H_{X_1, \dots, X_d}$  همان CDF توأم  $\{X_1, \dots, X_d\}$  می‌باشد. چون برای متغیرهای تصادفی پیوسته تابع CDF حاشیه‌ها از ۰ تا ۱ غیرکاهشی می‌باشند، می‌توان مفصل  $C_{U_1, \dots, U_d}$  را به عنوان تبدیل  $H_{X_1, \dots, X_d}$  از  $[-\infty, \infty]^d$  به  $[0, 1]^d$  در نظر گرفت. نتیجه این تبدیل این است که توزیع‌های حاشیه‌ای از  $H_{X_1, \dots, X_d}$  جدا می‌گردند و بنابراین، تنها به ارتباط بین متغیرها مربوط می‌شوند و توصیف کاملی از ساختار وابستگی کلی ارائه می‌دهند (۱۴).

جریان‌های کمینه حوضه آبریز دز در دوره آماری ۱۳۳۵ تا ۱۳۹۱، دو سرشاخه متصل بهم سپید دشت سزار (س. د. س) و سپید دشت زاز (س. د. ز) انتخاب گردیدند.

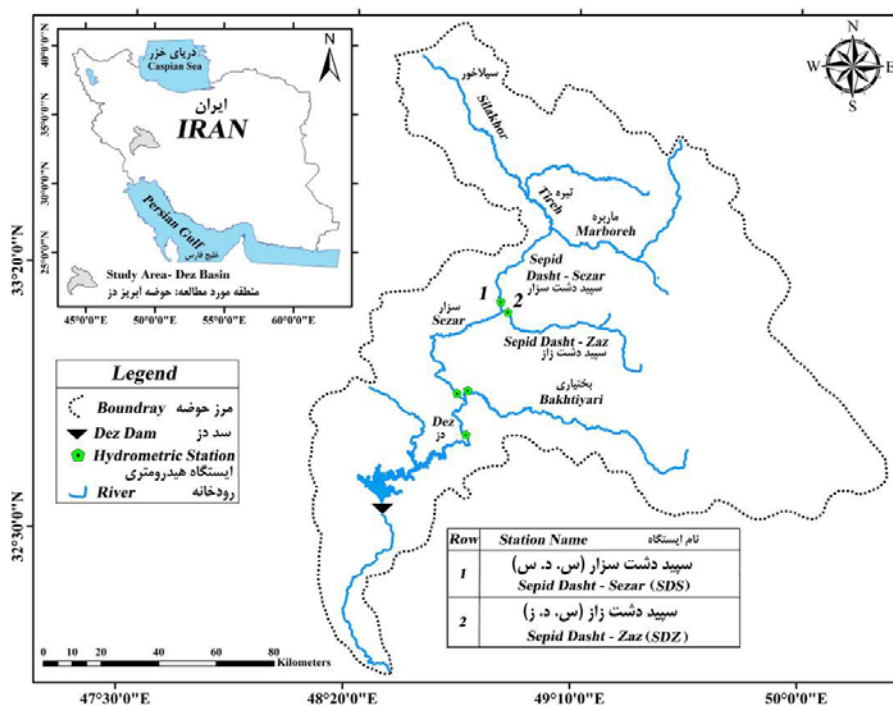
### بررسی همگنی داده‌ها

در صورتی، وجود سری زمانی طولانی مدت دقت آنالیز فراوانی را افزایش می‌دهد که سری زمانی همگن باشد و روندی کاهشی و یا افزایشی در آن مشاهده نگردد (۲). در این تحقیق برای بررسی همگنی سری زمانی هر ایستگاه از آزمون من- کندال استفاده شده است. شرط لازم برای استفاده از این آزمون عدم وجود ضریب خودهمبستگی معنی‌دار در سری زمانی داده‌هاست. حال آنکه اغلب سری‌های هیدرولوژیک دارای خودهمبستگی معنی‌دار می‌باشند (۸). در این پژوهش برای بررسی روند جریان‌های کمینه هفت روزه حوضه آبریز دز از ویرایش سوم آزمون من- کندال (با حذف اثر همه ضرایب خودهمبستگی معنی‌دار) استفاده گردید. میانی تئوری این آزمون به طور مبسوط توسط دین‌پژوه و همکاران (۳) و خلیلی و همکاران (۸) ارائه شده است.

### انتخاب مناسب‌ترین توزیع‌های حاشیه‌ای

برای بررسی ساختار وابستگی بین جریان‌های کمینه هفت روزه دو رودخانه متصل به هم، لازم است در ابتدا توزیع تک متغیره مناسب حاکم بر هر متغیر تعیین شود (۲۴). برای اینکه تغییرات یک متغیر تصادفی به درستی توسط توزیع مورد نظر بیان شود، باید تخمین پارامترهای آن توزیع به خوبی انجام شود. در این صورت می‌توان با خطای کمتری چندک‌ها و امید ریاضی را با استفاده از مدل برازش داده شده تعیین نمود. در این تحقیق، از روش گشتاورهای خطی برای تخمین پارامتر توزیع‌های آماری استفاده شده است. هاسکینگ (۵) گشتاورهای خطی را بصورت ترکیب خطی از آماره‌های مرتب شده بیان کرد.

در این مطالعه توزیع‌های نرمال (NOR)، لوگ نرمال (LN)، پیرسون تیپ سه (P3)، نمایی (EXP)، گاما (GAM)، توزیع مقادیر حدی تعمیم یافته (GEV)، ناگامی (NAK)، رایلی (RAY)، لجستیک (LOG)، لجستک تعمیم یافته (GLOG)، پارتوی تعمیم یافته (GPA) و ویبول (WEI) بر داده‌های جریان کمینه ۷ روزه حوضه آبریز دز برازش داده شد. پس از برازش توزیع‌های آماری، می‌بایست نکویی برازش هر توزیع توسط آزمون کلموگروف- اسمیرنوف مورد بررسی قرار گیرد. در صورتی که در سطح احتمال ۵ درصد برازش مدل‌ها توسط آزمون کلموگروف- اسمیرنوف مورد تایید واقع شود، توزیع احتمالاتی مورد نظر پذیرفته می‌شود. پس از کنترل نکویی برازش و تعیین توزیع‌های مورد قبول، برای انتخاب بهترین



شکل ۱- موقعیت حوزه آبریز دز و ایستگاه‌های هیدرومتری مورد مطالعه.

Fig 1- Location of Dez basin and selected stations.

کمیته هفت روزه در سرشاخه‌های متصل به هم حوزه آبریز دز با استفاده از روش کندال تاو<sup>۱</sup> (رابطه ۴) محاسبه گردید.

$$\tau = \left( \frac{N}{2} \right)^{-1} \sum_{i < j} \text{sign}[(x_i - x_j)(y_i - y_j)] \quad (4)$$

که در رابطه فوق  $N$  تعداد داده‌ها،  $\text{sign}()$  تابع علامت و  $x$  و  $y$  جفت داده‌های مشاهداتی برای جریان کمیته هفت روزه در محل اتصال دو سرشاخه می‌باشد.

گام دوم و بسیار مهم در کاربرد توابع مفصل، تخمین پارامتر مفصل ( $\theta$ ) می‌باشد. برای تخمین پارامتر وابستگی مفصل روش‌های متعددی نظیر روش گشتاورها، روش حداکثر درست‌نمایی<sup>۲</sup>، روش حداکثر درست‌نمایی کانونیکال<sup>۳</sup> و روش‌های فراکوشی (مانند الگوریتم ژنتیک) توسط محققین توسعه داده شده است که هر کدام دارای مزایا و معایبی می‌باشند. در این میان روش توابع منطقی برای حاشیه‌ها<sup>۴</sup> (IFM) متداول‌ترین روش برای تخمین پارامتر مفصل می‌باشد که توسط جوئی (۶) به شرح زیر ارائه گردیده است.

در کل می‌توان به تابع مفصل به عنوان تبدیل یک تابع چند متغیره از  $[-\infty, +\infty]^d$  به  $[0, 1]^d$  نگریست. این تبدیل، توزیع‌های حاشیه‌ای را از تابع  $F$  جدا نموده و لذا تابع مفصل  $C$  تنها به وابستگی بین متغیرها مربوط شده و از این راه توصیف کاملی از ساختار وابستگی داخلی ارائه می‌نماید. به عبارت دیگر قضیه اسکالر نشان می‌دهد که برای توزیع‌های چند متغیره، ساختار وابستگی داخلی بین متغیرها و توابع توزیع یک متغیره حاشیه‌ای می‌توانند از یکدیگر تفکیک شده و تشریح کامل ساختار وابستگی توسط تابع مفصل قابل ارائه خواهد بود. توابع مفصل به خانواده‌های متعددی تقسیم شده اند که در این میان، توابع مفصل ارشمیدسی یکی از پرکاربردترین توابع در تحلیل چند متغیره وقایع هیدرولوژیک بوده و دارای روابط صریح در توابع توزیع تجمعی خود می‌باشند که این مزیت استفاده از این توابع نسبت به برخی توابع مثلاً توابع مفصل بیضوی می‌باشد که توزیع تجمعی صریحی ندارند. در این مطالعه، از پنج تابع مفصل مختلف شامل علی-میخائیل-حق، کلایتون، فرانک، گالامبوس، گامبل-هوگارد به منظور تحلیل چند متغیره جریان‌های کمیته هفت روزه حوزه آبریز دز استفاده گردید. جدول ۱ روابط مربوط به توابع مفصل مورد استفاده را نشان می‌دهد.

گام اول در برازش و انتخاب تابع مفصل تعیین میزان همبستگی دو متغیر مورد بررسی می‌باشد. در این مطالعه میزان وابستگی جریان

1 - Kendall's  $\tau$

2 - Maximum Likelihood Method

3 - Canonical Maximum Likelihood

4 - Inference Functions for Margins

جدول ۱- توابع مفصل مورد استفاده (۱۴).  
Table 1- Used copula functions (14)

خانواده مفصل Copula Family	تابع مفصل Copula	تابع توزیع تجمعی CDF	$\theta$
	علی - میخائیا - حق Ali - Mikhail - Haq	$C(u, v) = \frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}$	$-1 \leq \theta \leq 1$
ارشمیدسی Archimedean	کلایتون Clayton	$C(u, v) = \max \left[ (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}, 0 \right]$	$\theta \geq 0$
	فرانک Frank	$C(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left[ 1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right]$	$\theta \neq 0$
مقادیر حدی Extreme Value	گالامبوس Galambos	$C(u, v) = uv \exp \left\{ \left[ (-\ln u)^{-\theta} + (-\ln v)^{-\theta} \right]^{-1/\theta} \right\}$	$\theta \geq 0$
	گامبل - هوگارد Gumbel-Hougaard (GH)	$C(u, v) = \exp \left\{ - \left[ (-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta} \right]^{1/\theta} \right\}$	$\theta \geq 1$

برای انتخاب مناسب‌ترین مفصل، به این صورت عمل می‌شود که بعد از انتخاب و برازش توزیع حاشیه‌ای مناسب بر هر کدام از متغیرهای مورد بررسی و تخمین پارامترهای توزیع به روش حداکثر درستنمایی، چند نوع تابع مفصل مختلف را برای پیوند این دو تابع توزیع حاشیه‌ای در نظر گرفته و پارامتر تابع مفصل با روش IFM (۶) برآورد می‌شود. سپس با مقایسه نتایج هر کدام از مفصل‌ها با نتایج حاصل از احتمال تجربی، مفصل مناسب برای داده‌های مورد نظر انتخاب شد. برای انتخاب بهترین تابع مفصل از آماره‌های NS (رابطه ۶)، AIC (رابطه ۷) و آماره کرامر-فون مایسس (رابطه ۸) استفاده شد.

$$NS = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (C_{pi} - C_{ei})^2}{\sum_{i=1}^n (C_{ei} - \bar{C}_e)^2} \quad (۶)$$

$$AIC = -2 \ln ML + 2k \quad (۷)$$

$$Sn = \sum_{i=1}^n [C_{pi} - C_{ei}]^2 \quad (۸)$$

که در روابط فوق  $n$  اندازه نمونه،  $C_p$  مقادیر محاسبه شده مفصل تئوری،  $C_e$  مقادیر مشاهداتی مفصل تجربی،  $\bar{C}_e$  میانگین مقادیر مشاهداتی مفصل تجربی،  $\ln ML$  مقدار بیشینه تابع لگاریتم درستنمایی و  $k$  تعداد پارامترهای برازش داده شده می‌باشند. تابع مفصلی مناسب‌تر می‌باشد که در آن مقادیر AIC و Sn کمترین بوده و مقدار NS به یک نزدیکتر باشد.

روش توابع منطقی برای حاشیه‌ها از نظر محاسباتی بسیار کارآمدتر از روش‌های دیگر است. برای موارد دو متغیره، دو متغیر تصادفی همبسته  $X$  و  $Y$  به ترتیب بصورت توابع  $f_Y(y; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  و  $f_X(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$  شده‌اند که پارامترهای  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  و  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  پارامترهای  $f_Y(y)$  هستند. تعداد واقعی پارامترها بستگی به نوع توزیع‌های حاشیه‌ای تک متغیره دارد.

برای  $n$  جفت مشاهده مستقل، تابع لگاریتم درستنمایی برای  $Y$  و  $X$  یعنی  $\ln L_X(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$  و  $\ln L_Y(y; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  بطور مجزا جهت تخمین پارامترها بیشینه می‌شوند.

$\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_r$  و  $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_p$  پارامترهای تخمینی می‌باشند. تابع لگاریتم درستنمایی تابع چگالی احتمال توأم  $f_{X,Y}(x, y)$  بصورت زیر می‌باشد:

$$\ln L(x, y; \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_p, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_r, \theta) = \quad (۵)$$

$$\ln L_C(x, y; F_X(x), F_Y(y), \theta) +$$

$$\ln L_X(x; \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_p) + \ln L_Y(y; \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_r)$$

که در آن  $\ln L_C$  تابع لگاریتم درستنمایی تابع چگالی مفصل‌ها می‌باشند. با جاگذاری مقادیر تخمین زده شده برای  $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_r$  و  $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_p$  در معادله (۵)، تابع لگاریتم درستنمایی  $\ln L$  برای بدست آوردن پارامتر مفصل تخمینی  $\hat{\theta}$  بیشینه می‌شود.

## دوره بازگشت دو متغیره

$$C(U|V) = \frac{C(U|V)}{v} \quad (۱۳)$$

که در رابطه فوق  $C(U|V)$  وقایعی را بیان می‌کند که در آنها  $U \leq u$  به شرط اینکه  $V \leq v$  و  $u$  و  $v$  توابع توزیع حاشیه‌ای می‌باشند) باشد (۲۲). با در نظر گرفتن حد آستانه‌های شرطی مختلف و استفاده از توابع توزیع توأم شرطی مربوطه می‌توان به مجموعه نقاطی با دوره بازگشت‌های یکسان دست یافت و براساس معیارهای مد نظر، یکی از این وقایع را به عنوان واقعه طراحی انتخاب نمود.

## نتایج و بحث

## بررسی همگنی داده ها و انتخاب توزیع حاشیه‌ای مناسب

برای انجام آنالیز فراوانی دبی‌های حداقل هفت روزه، ابتدا باید حداقل جریان‌های هفت روزه سالانه استخراج گردد. برای این منظور میانگین متحرک هفت روزه دبی روزانه ایستگاه‌ها محاسبه شده و برای هر سال حداقل آن انتخاب می‌گردد که حداقل دبی هفت روزه سالانه نامیده می‌شود. در مرحله بعد باید فرض لازم برای آنالیز فراوانی، یعنی همگن بوده داده‌های حداقل دبی هفت روزه بررسی گردد. برای این منظور از آزمون من-کندال اصلاح شده استفاده گردید. جدول ۲ نتایج بررسی روند تغییرات جریان کمینه هفت روزه حوضه آبریز دز را پس از حذف اثر همه ضرایب خودهمبستگی معنی-دار نشان می‌دهد. با توجه به مقادیر Z آزمون MMK ارائه شده در این جدول، مشاهده می‌شود که جریان‌های کمینه هفت روزه حوضه آبریز دز در تمامی ایستگاه‌های مورد مطالعه افزایشی غیرمعنی‌دار را تجربه کرده و جریان‌های حداقل هفت روزه سالانه در سطح معنی‌داری ۵ درصد همگن می‌باشند.

پس از تایید همگنی سری‌های جریان کمینه هفت روزه حوضه آبریز دز، از توزیع‌های GEV، GAM، EXP، LP3، LN، NOR، WEI و GPA، GLOG، LOG، RAY، NAK برای انجام تحلیل فراوانی بهره گرفته شد. برای برازش توزیع‌های احتمالاتی به داده‌های جریان کمینه هفت روزه حوضه آبریز دز در محل ایستگاه‌های سپید دشت سزار و سپید دشت زاز، ابتدا گشتاورهای خطی برای سری‌های استخراجی محاسبه و سپس با برابر قرار دادن آن‌ها با گشتاورهای خطی توزیع‌های احتمالاتی، ضرایب توزیع‌های مورد نظر برآورد گردید. پس از برآورد ضرایب و برازش توزیع‌های آماری مورد بررسی، در ابتدا نکویی برازش این توزیع‌ها از نظر آماری با استفاده از آزمون KS در سطح اطمینان ۵ درصد مورد بررسی قرار گرفت. با وجود اینکه بررسی مشاهده‌ای برازش توابع چگالی احتمالی روشی مرسوم است ولیکن مقایسه بین توزیع‌هایی که برازش نسبتاً مشابهی دارند دشوار و همراه با خطا خواهد بود. بنابراین، با استفاده از آماره‌های NRMSE و NS میزان دقت و کارایی توزیع‌های آماری در مدل کردن متغیر

در تحلیل فراوانی تک متغیره، نگاشت یک به یک بین تابع توزیع دوره بازگشت وجود دارد (یعنی یک مقدار معین از تابع توزیع به طور منحصر بفرد، یک دوره بازگشت معین را تعریف می‌کند و برعکس). هرچند، اجتماع دو دوره بازگشت تک متغیره مجزا هیچ وابستگی معنی‌داری را بین متغیرهای تصادفی همبسته آشکار نمی‌کند. برای ارزیابی ریسک متغیرهای تصادفی همبسته بطور همزمان، به تحلیل فراوانی دومتغیره نیاز می‌باشد. تحلیل فراوانی دومتغیره در مورد دو متغیر تصادفی همبسته بوسیله دوره بازگشت توأم تعریف می‌گردد (۲۱). دوره‌های بازگشت توأم در دو حالت بشرح زیر تعریف شده‌اند:

حالت اول دوره بازگشت توأمی است که در آن مقدار مشاهده شده از  $x$  یا از  $y$  تجاوز نموده باشد (یعنی،  $X > x$  یا  $Y > y$ ) که با  $T_{XY}$  نشان داده می‌شود.

حالت دوم دوره بازگشت توأمی است که در آن جفت مشاهده شده هم از  $x$  و هم از  $y$  تجاوز نموده باشد (یعنی،  $X > x$  و  $Y > y$ ) که با  $T'_{XY}$  نشان داده می‌شود.

این دو نوع دوره بازگشت توأم برحسب مفصل‌ها ارائه شده اند و به ترتیب بصورت زیر محاسبه می‌شوند (۲۲):

$$T_{XY} = \frac{1}{P(X > x \text{ or } Y > y)} = \frac{1}{1 - C(F_X(x), F_Y(y))} \quad (۹)$$

$$T'_{XY} = \frac{1}{P(X > x \text{ and } Y > y)} = \frac{1}{1 - F_X(x) - F_Y(y) + F_{X,Y}(x,y)} \quad (۱۰)$$

$$= \frac{1}{1 - F_X(x) - F_Y(y) + C(F_X(x), F_Y(y))}$$

## دوره بازگشت شرطی در حالت دو متغیره

در حالت چند متغیره، دوره بازگشت می‌تواند به صورت

$$T_{X > x} = \frac{1}{P(X > x)}$$

واقعه  $X$  است. پس می‌توان رابطه مذکور را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$T_{X > x} = \frac{1}{1 - P(X > x)} \quad (۱۱)$$

حال برای تعیین دوره بازگشت‌های شرطی، برای وقایعی که حد آستانه‌های آن به طور شرطی بیان می‌شوند، نیز می‌توان توابع توزیع توأم شرطی را جایگزین  $P(X \leq x)$  نمود. به طور مثال برای تعیین دوره بازگشت رخداد وقایع دو متغیره با  $X > x$  به شرط اینکه  $Y \leq y$  باشد، با استفاده از توابع مفصل حاکم بر متغیره‌ها، می‌توان از رابطه زیر استفاده نمود.

$$T_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{1 - C(U|V)} \quad (۱۲)$$

نیز پارامترهای هریک از توزیع‌های منتخب در هر ایستگاه ارائه شده است. در شکل ۲ نمودار تابع توزیع تجمعی تجربی و تئوری برای جریان‌های کمینه هفت روزه حوضه آبریز دز ارائه شده است. با توجه به این شکل مشاهده می‌شود که تابع حاشیه‌ای منتخب تطابق مناسبی با جریان‌های کمینه هفت روزه دارند.

جریان کمینه با تداوم هفت روزه محاسبه و نتایج مربوطه در جدول ۳ ارائه شده است. با توجه به جدول ۳ می‌توان نتیجه گرفت که برای متغیر جریان کمینه هفت روزه در محل ایستگاه‌های مورد مطالعه، توزیع LOG برای ایستگاه‌های سپید دشت سزار و سپید دشت زاز بهترین برازش را داشته و از عملکرد بهتری برخوردار بود. در جدول ۴

جدول ۲- نتایج بررسی روند تغییرات جریان کمینه هفت روزه حوضه آبریز دز با استفاده از آزمون MMK  
Table 2. Results of applying MMK test on 7- day low flow at Dez Basin

متغیر Parameter	ایستگاه Station	
	س. د. س SDS	ز. د. ز SDZ
	جریان کمینه هفت روزه 7- day low flow	0.49

دشت زاز با استفاده از روش کندال تاو به ترتیب برابر با ۰/۴۰ محاسبه گردید. در مرحله بعد به منظور تخمین پارامتر وابستگی مفصل از روش IFM استفاده شد. برای انتخاب مناسب‌ترین تابع مفصل از آماره‌های AIC، NS و Sn بهره گرفته شد.

### انتخاب تابع مفصل

پس از تعیین توابع حاشیه‌ای مناسب، از هفت تابع مفصل مختلف برای ساخت توابع توزیع توام استفاده گردید. در ابتدا وابستگی بین جریان‌های کمینه هفت روزه در ایستگاه‌های سپید دشت سزار و سپید

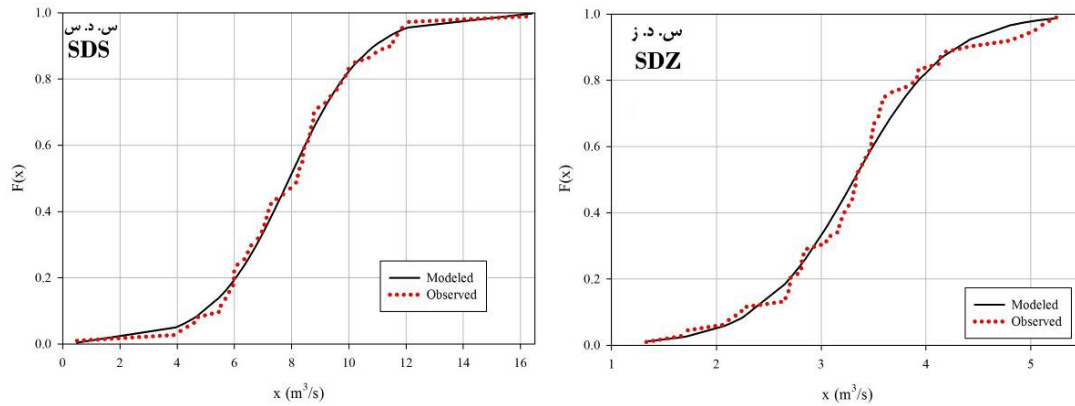
جدول ۳- مقادیر آماره‌های KS، NS و NRMSE توزیع‌های برازشی برای سری‌های جریان کمینه ۷ روزه حوضه آبریز دز  
Table 3. The values of KS, NS and NRMSE statistics for fitted probability distributions at Dez basin

تابع توزیع احتمال Probability Distribution	س. د. س SDS			ز. د. ز SDZ		
	KS	NS	NRMSE	KS	NS	NRMSE
نرمال NOR	0.082	0.990	2.944	0.132	0.970	4.980
لوگ نرمال LN	0.160	0.912	8.615	0.140	0.953	6.290
پیرسون تیپ ۳ P3	0.271	0.801	4.522	0.121	0.789	5.581
نمایی EXP	0.410	0.418	22.11	0.426	0.305	24.172
گاما GAM	0.091	0.965	5.42	0.118	0.964	5.481
حدی تعمیم یافته GEV	0.067	0.987	3.291	0.123	0.968	5.220
لجستیک LOG	<b>0.061</b>	<b>0.992</b>	<b>2.530</b>	<b>0.110</b>	<b>0.982</b>	<b>3.912</b>
لجستیک تعمیم یافته GLOG	0.207	0.989	3.080	0.152	0.977	4.411
رایلی RAY	0.221	0.793	13.19	0.290	0.657	16.972
ناکاگامی NAK	0.078	0.981	4.024	0.118	0.969	5.081
پارتوی تعمیم یافته GPA	0.104	0.658	16.95	0.151	0.659	16.932
ویبول WEI	0.171	0.983	3.745	0.137	0.961	5.712

جدول ۴- ضرایب توزیع‌های حاشیه‌ای منتخب

Table 4- The estimated parameters of selected probability distributions

ایستگاه Station	توزیع Distribution	پارامتر Parameters	
		$\alpha_1$	$\alpha_2$
س. د. س SDS	لجستیک	1.387	7.982
س. د. ز SDZ	Logistic	0.454	3.325

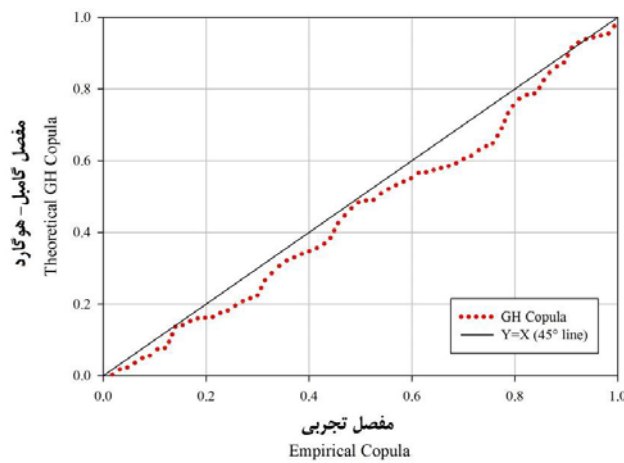


شکل ۲- مقایسه تابع توزیع تجمعی تجربی و تئوری حاشیه‌ای برای جریان کمینه هفت روزه ایستگاه‌های مورد مطالعه.  
Fig 2- Comparison of empirical and theoretical probability distributions of 7-day low flow at studied stations.

جدول ۵- نتایج آزمون‌های نکویی برازش و پارامتر مفصل برای توابع مختلف مورد مطالعه.

Table 5- Results of goodness of fit test and dependency parameter of different considered copula

متغیرهای جریان کمینه Low flow variables	آماره Statistic	تابع مفصل Copula Function				
		Clayton	AMH	Frank	Galambos	GH
جریان کمینه ایستگاه‌های س. د. س (U) و س. د. ز (V) Low flow at SDS (U) and SDZ (V) stations	AIC	-7.204	-6.859	-7.328	-7.251	-7.356
	Sn	0.195	1.122	0.155	0.145	0.144
	NS	0.959	0.764	0.967	0.969	0.969
	$\theta$	7.997	1.000	20.000	5.523	6.236



شکل ۳- مقایسه مفصل تجربی و گامبل هوگارد با خط ۴۵ درجه  
Fig 3-The fitted GH copula versus the Empirical copula for the studied stations.



نشان می‌دهد. با توجه به این شکل مشاهده می‌شود که مفصل GH وابستگی بین دو متغیر جریان کمینه را به خوبی توجیه می‌نماید. شکل ۴ (ب) نیز نمودار کنتور تابع توزیع توام را برای ایستگاه‌های مورد بررسی نشان می‌دهد. این نمودار نشان می‌دهد که چگونه می‌توان با استفاده از احتمالات توام، جریان کمینه را در دو ایستگاه متصل به هم، به صورت همزمان تعیین نمود. این امر می‌تواند اطلاعات بسیار مفیدی را در ارتباط با رفتار احتمالاتی جریان کمینه به منظور بهره‌برداری بهینه از آب‌های سطحی، در اختیار کاربران و محققان قرار دهد. به عنوان مثال می‌توان به ازای جریان کمینه مشخص در ایستگاه سپید دشت سزار یا سپید دشت زاز، احتمال وقوع شرطی و نیز دوره‌های بازگشت توام را تعیین نمود.

شکل ۵ دوره‌های بازگشت توام جریان کمینه هفت روزه را در ایستگاه‌های سپید دشت سزار و سپید دشت زاز، برای حالت "یا" ( $X < x \text{ or } Y < y$ ) نشان می‌دهد. با توجه به این شکل مشاهده می‌شود که با افزایش دوره بازگشت، میزان جریان کمینه در هر دو ایستگاه کاهش می‌یابد. در حالتی که جریان در محل ایستگاه سپید دشت زاز بین محدوده  $4 \text{ (m}^3/\text{s)}$  تا  $5 \text{ (m}^3/\text{s)}$  واقع می‌شود، احتمال رخداد افزایش می‌یابد. زمانی که جریان در ایستگاه سپید دشت سزار بین محدوده  $9 \text{ (m}^3/\text{s)}$  تا  $16 \text{ (m}^3/\text{s)}$  باشد، در این صورت دوره بازگشت کوتاه‌تر می‌گردد. حال با استفاده از این شکل می‌توان حالت‌های توام متفاوتی را مورد بررسی قرار داد. به عنوان مثال حالتی را در نظر بگیرید که جریان در ایستگاه سپید دشت زاز بین  $1 \text{ (m}^3/\text{s)}$  تا  $3 \text{ (m}^3/\text{s)}$  باشد. در این صورت اگر جریان ایستگاه سپید دشت سزار را در بین  $0.5 \text{ (m}^3/\text{s)}$  تا  $7 \text{ (m}^3/\text{s)}$  محدود کنیم در این صورت احتمال رخداد این حالت بسیار کاهش یافته و دوره‌های بازگشت بزرگتری را به دست می‌دهد. همچنین این شکل نشان می‌دهد که احتمال بروز خشکسالی و کاهش جریان در یکی از دو رودخانه متصل به هم به گونه‌ای است که می‌توان تقریباً هر ۷۰ سال یکبار چنین انتظاری را داشت.

شکل ۶ دوره‌های بازگشت توام جریان کمینه هفت روزه را در ایستگاه‌های سپید دشت سزار و سپید دشت زاز برای حالت "و" ( $X < x \text{ and } Y < y$ ) نشان می‌دهد. در نگاه اول می‌توان مشاهده کرد که در حالت "و" دوره بازگشت محاسباتی به شدت افزایش می‌یابد. یو و راسموسن (۲۲) در مطالعه‌ای نشان دادند که مقدار دوره بازگشت محاسباتی در دو حالت "یا" و "و" می‌تواند به ترتیب با رابطه‌های  $T(X < x \text{ or } Y < y) \approx T/2$  و  $T'(X < x \text{ and } Y < y) \approx T^2$  به طور تقریبی تخمین زده شود. برای مثال برای  $T_x = T_y = 100$  سال، دوره بازگشت توام در حالت "یا" برابر با ۵۰ سال و در حالت "و" برابر با ۱۰۰۰۰ سال

جدول ۵ نتایج آزمون‌های نکویی برازش را برای هریک از توابع مفصل نشان می‌دهد. با توجه به این جدول مشاهده می‌شود که برای دو ایستگاه سپید دشت سزار و سپید دشت زاز مفصل گامبل-هوگارد با داشتن کمترین (بیشترین) مقدار AIC و Sn (NS) بهترین عملکرد را در برآورد مقادیر مشاهداتی داشته است. عملکرد مفصل‌های فرانک و کلایتون نیز بسیار نزدیک به هم بوده و با اختلاف اندکی در رتبه‌های بعدی توابع مفصل مناسب برای داده‌های جریان کمینه هفت روزه ایستگاه‌های سپید دشت سزار و سپید دشت زاز قرار می‌گیرند.

انتخاب مفصل‌های مناسب به محدوده سطح وابستگی که می‌توانند توصیف کنند، بستگی دارد. برای نمونه، مفصل گامبل-هوگارد می‌تواند فقط برای وابستگی مثبت به کار رود. مفصل علی-میخائیل-حق برای وابستگی ضعیف ( $-0.1807 < \tau < 0.3333$ ) و مفصل FGM برای  $-0.22 < \tau < 0.22$  مناسب می‌باشد، در حالیکه مفصل‌های کلایتون و فرانک برای هر دو وابستگی مثبت و منفی مناسب هستند (۱۴). با توجه به نتایج به دست آمده مشاهده می‌شود که وابستگی جریان‌های کمینه هفت روزه در ایستگاه‌های مورد مطالعه مقادیر مثبتی بوده و در نتیجه مفصل‌هایی که برای وابستگی‌های مثبت مناسب بودند، بهترین عملکرد را داشته‌اند. همچنین دلیل عملکرد ضعیف مفصل علی-میخائیل-حق را نیز می‌توان با توجه به سطح وابستگی توجیه نمود. بنابراین با توجه به نتایج آزمون‌های نکویی برازش، در نهایت برای ایستگاه‌های سپید دشت سزار و سپید دشت زاز تابع مفصل گامبل-هوگارد برای ایجاد توزیع‌های توام انتخاب گردید. شکل ۳ نمودار مقادیر تخمینی حاصل از مفصل GH را در مقایسه با تابع مفصل تجربی نشان می‌دهد. این شکل نشان می‌دهد که مقادیر محاسباتی به خط ۴۵ درجه نزدیک بوده و در نتیجه تابع مفصل انتخابی گزینه مناسبی برای تحلیل توام جریان‌های کمینه هفت روزه حوضه آبریز دز می‌باشند. ژانگ و همکاران (۲۴) نیز در مطالعه خود با بررسی مفصل‌های گامبل، فرانک و کلایتون، تابع مفصل کلایتون را به عنوان مناسب‌ترین مفصل برای تحلیل فراوانی جریان کمینه هفت روزه دو ایستگاه وژو<sup>۱</sup> و شیجانو<sup>۲</sup> واقع در حوضه آبریز پرل معرفی کردند.

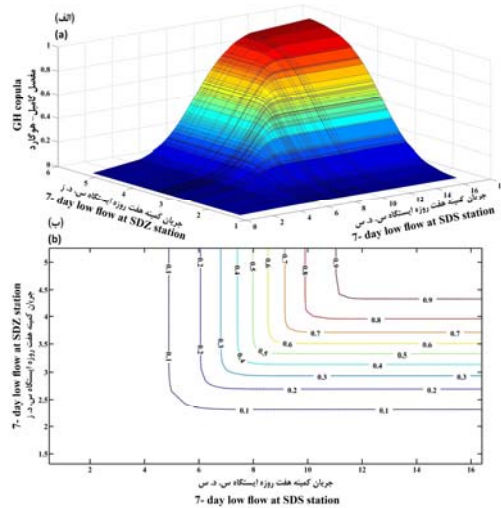
## تحلیل احتمالات توام جریان کمینه هفت روزه حوضه آبریز

دز

شکل ۴ (الف) نمودار بهترین تابع مفصل منتخب را برای جریان کمینه هفت روزه در ایستگاه‌های سپید دشت سزار و سپید دشت زاز

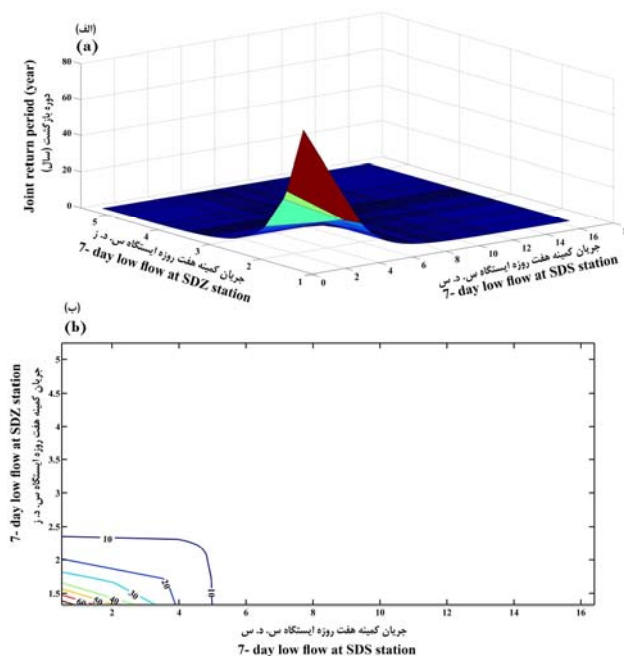
دوره بازگشت برای حالتی که جریان کمینه در هر دو ایستگاه از مقدار مشخصی کمتر باشد، از ۵۰ سال تا ۲۰۰ سال متغیر بوده و ترکیبات مختلفی را می‌توان شامل شود. این اطلاعات در تحلیل جامع وضعیت خشکسالی و نیز بررسی سناریوهای مختلف اقلیمی می‌تواند بسیار کارساز باشد.

تخمین زده می‌شود. این امر بدین مفهوم است که شانس وقوع دو واقعه به صورت همزمان بسیار کمتر بوده و در نتیجه دوره بازگشت‌های بزرگتری را نیز تجربه خواهد کرد. بدین صورت می‌توان علت افزایش دوره بازگشت توام را در شکل ۶ توجیه نمود. اکنون به مانند شکل ۵، می‌توان حالت‌های مختلفی را در نظر گرفته و احتمال وقوع هر حالت را بررسی نمود. شکل ۶ (ب) نیز نشان می‌دهد که



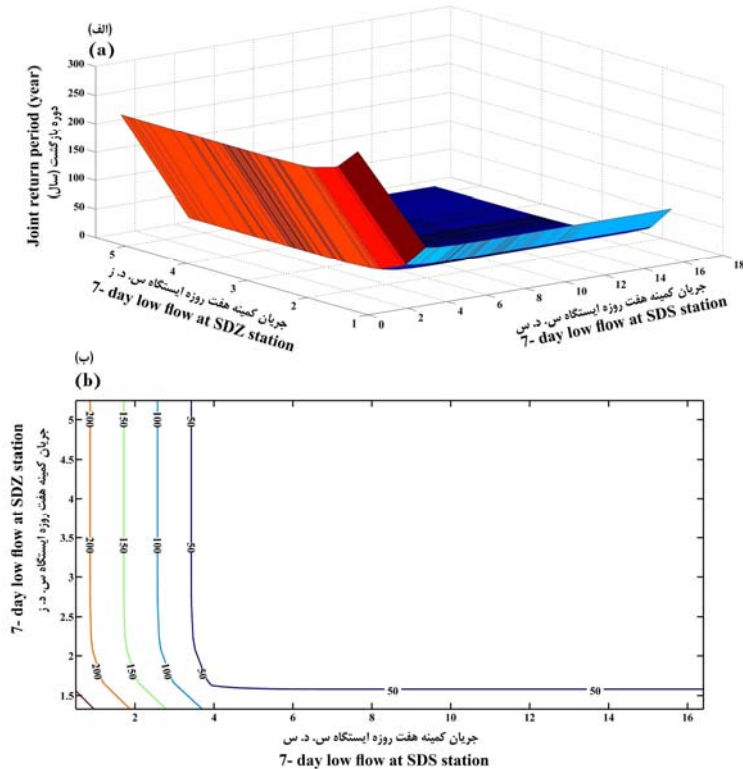
شکل ۴- (الف) احتمال تجمعی توام جریان کمینه هفت روزه در ایستگاه‌های سپید دشت سزار و سپید دشت زاز (ب): خطوط کنتور احتمال تجمعی توام

Fig 4- (a) Joint cumulative probability distribution of the 7-day low flow at the SDZ and SDS stations; (b) contours of the joint cumulative probability distribution



شکل ۵- (الف) دوره بازگشت توام جریان کمینه هفت روزه در ایستگاه‌های سپید دشت سزار و سپید دشت زاز (ب): خطوط کنتور احتمال دوره‌های بازگشت توام

Fig 4- (a) Joint return periods of 7-day low flow at the SDS and SDZ stations; (b) contours of the joint return periods.



شکل ۶- (الف) دوره بازگشت توام برای رخداد‌های  $X < x$  و  $Y < y$ ; (ب) خطوط کنتور برای رخداد‌های  $X < x$  و  $Y < y$

Fig 6- (a) Joint return periods of events with  $X < x$  and  $Y < y$ ; (b) contours of the joint return periods of events with  $X < x$  and  $Y < y$

### تعیین احتمالات شرطی

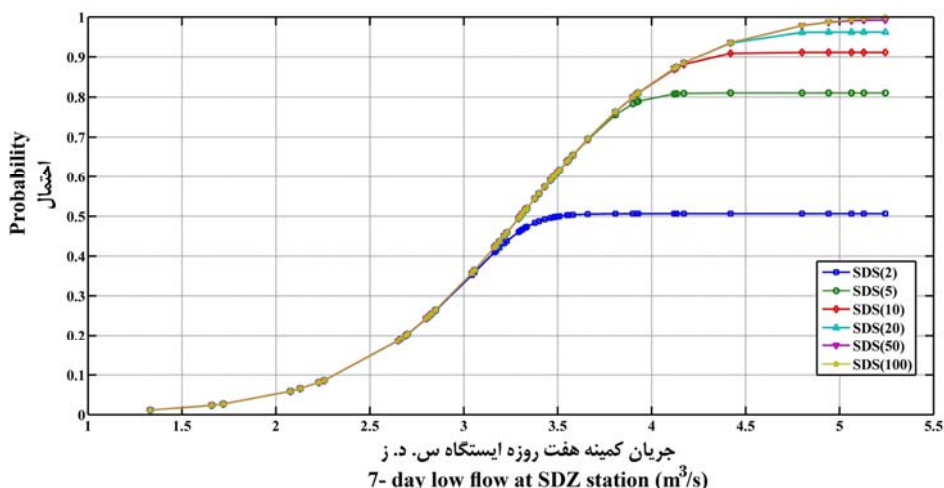
پس از تعیین توابع مفصل منتخب برای بیان ساختار وابستگی بین پارمترهای جریان کمینه ۷ روزه، می‌توان از این توابع به منظور محاسبه دوره‌های بازگشت توام و شرطی استفاده نمود. بدین منظور در ابتدا مقادیر چندک‌های تک متغیره با استفاده از توزیع حاشیه‌ای

منتخب در هر ایستگاه در دوره‌های بازگشت ۲، ۵، ۱۰، ۲۰، ۵۰ و ۱۰۰ ساله محاسبه گردید. جدول ۶ مقادیر چندک‌های برآور شده را در محل ایستگاه سپید دشت سزار و سپید دشت زاز برای جریان کمینه ۷ روزه نشان می‌دهد. با استفاده از روابط ۱۰ و ۱۱ نیز مقادیر دوره بازگشت توام در شرایط "یا" و "و" محاسبه و در جدول ۶ ارائه شد.

جدول ۶- مقادیر دوره بازگشت توام جریان کمینه هفت روزه در ایستگاه‌های سپید دشت سزار و سپید دشت زاز به ازای جریان کمینه طراحی (سال)

Table 6- Joint return periods of 7-day low flow at the SDS and SDZ stations given low flow of design return periods (years)

دوره بازگشت تک متغیره Univariate return period (years)	ایستگاه Station		دوره بازگشت توام Joint return period	
	س. د. س SDS (m <sup>3</sup> /s)	س. د. ز SDZ (m <sup>3</sup> /s)	$X < x$ or $Y < y$	
			$X < x$ and $Y < y$	
2	7.93	3.31	1.85	2.17
5	6.05	2.70	4.26	6.04
10	4.96	2.34	8.08	13.11
20	3.94	2.00	15.42	28.44
50	2.66	1.58	36.53	79.20
100	1.71	1.27	70.52	171.84



شکل ۷- احتمال شرطی جریان کمیته هفت روزه ایستگاه س. د. ز به ازای جریان کمیته ایستگاه س. د. س در دوره بازگشت‌های ۲، ۵، ۱۰، ۲۰، ۵۰ و ۱۰۰ سال

Fig. 7- Conditional probability of 7-day low flow at the SDZ station given certain flow scenarios with return periods of 2, 5, 10, 20, 50, and 100 years at the SDS station

بهترین عملکرد را داشته است. سپس با بررسی سطح همبستگی، از پنج تابع مفصل مختلف به منظور دستیابی به توزیع تجمعی توأم بهره گرفته شد. نتایج نشان داد که برای زوج داده‌های جریان کمیته ایستگاه‌های سپید دشت سزار و سپید دشت زاز تابع مفصل GH بهترین عملکرد را داشته است. در این مطالعه، تحلیل فراوانی توأم با در نظر گرفتن دو حالت "یا" و "و" برای رخداد پدیده مورد نظر انجام شد. نتایج نشان داد که در ایستگاه‌های سپید دشت سزار و سپید دشت زاز برای حالت "یا"، با افزایش دوره بازگشت، میزان جریان کمیته در هر دو ایستگاه کاهش یافته و احتمال بروز خشکسالی و کاهش جریان در یکی از رودخانه‌های متصل به هم به گونه‌ای است که می‌توان تقریباً هر ۷۰ سال یکبار چنین انتظاری را داشت. همچنین در حالت "و" برای ایستگاه‌های سپید دشت سزار و سپید دشت زاز نیز دوره بازگشت وقوع رخداد مورد نظر به شدت افزایش یافت.

با توجه به نتایج حاصل از این مطالعه مشاهده می‌شود که استفاده از روش‌های چند متغیره (به ویژه توابع مفصل) می‌تواند حالت‌های ترکیبی مختلفی از رویدادها را برای مدیران و تصمیم‌گیران ارائه دهد که این امر موجب بهبود نحوه مدیریت سامانه‌های آبی خواهد شد. بنابراین پیشنهاد می‌گردد که در تحقیقات آتی از مفصل‌هایی که می‌توانند بیش از دو متغیر را مدل‌سازی کرده و تحلیل‌های جامع‌تری را ارائه دهند استفاده شود.

در این مطالعه برای بررسی دوره بازگشت شرطی، مقادیر چندک‌های محاسبه شده ایستگاه سپید دشت سزار در حالت تک متغیره، به عنوان حد آستانه جریان در ایستگاه سپید دشت زاز انتخاب گردید. حال می‌توان با استفاده از توابع حاکم بر متغیرهای جریان کمیته در دو ایستگاه سپید دشت سزار و سپید دشت زاز دوره بازگشت شرطی را تعیین و به صورت شکل ۷ ارائه نمود. در این شکل اولین نمودار از پایین، مربوط به حد آستانه  $Y \leq y$  که در آن  $y$  برابر با مقدار چندک با دوره بازگشت ۲ سال در ایستگاه سپید دشت سزار می‌باشد.

## نتیجه‌گیری کلی

پدیده‌های هیدرولوژیک اغلب دارای مشخصات مختلفی هستند که به منظور تحلیل فراوانی آنها، ممکن است به طور مستقل یا توأم مورد بررسی قرار گیرند. این مولفه‌ها مستقل نبوده، بلکه با یکدیگر در ارتباط هستند و تغییر یکی بر دیگری تأثیرگذار است. لذا تحلیل فراوانی یک متغیره آنها، به علت عدم در نظر گرفتن وابستگی بین این متغیرهای تصادفی، می‌تواند با خطا همراه باشد. در این مطالعه جریان کمیته حوضه آبریز دز در محل اتصال سرشاخه‌ها به یکدیگر، با استفاده از توابع مفصل مورد بررسی قرار گرفت. تحلیل فراوانی تک متغیره در ایستگاه‌های مورد مطالعه نشان داد که توزیع لجستیک در ایستگاه‌های سپید دشت سزار و سپید دشت زاز توزیع برتر بوده و

1. De Michele C., Salvadori G., Canossi M., Petaccia A., Rosso R., 2005. Bivariate statistical approach to check adequacy of dam spillway. *Journal of Hydrologic Engineering*, 10(1): 50–57.
2. Desa M., and Rakhecha P.R. 2007. Probable maximum precipitation for 24-h duration over an equatorial region. *Atmospheric research*, 84(2): 84–90.
3. Dinpashoh Y., Mirabbasi R., Jhajharia D., Zare Abianeh H., and Mostafaeipour A. 2014. Effect of short term and long-term persistence on identification of temporal trends. *Journal of Hydrologic Engineering*, 19.3: 617-625.
4. Favre A.C., El Adlouni S., Perreault L., Thiémondge N., and Bobée B. 2004. Multivariate hydrological frequency analysis using copulas. *Water resources research*, 40(1): 90-106.
5. Hosking J.R.M., and Wallis J.R. 1998. The effect of intersite dependence on regional flood frequency analysis. *Journal of Water Resource Research*, 24(4):59-71.
6. Joe H. 1997. *Multivariate Models and Dependence Concepts*. London: Chapman & Hall. 399 pp.
7. Kadri V.Y. 2005. Low flow hydrology: A review. *Journal of Hydrology*, 240(1): 147-186.
8. Khalili K., Tahroudi M.N., Mirabbasi R., Ahmadi F. 2015. Investigation of spatial and temporal variability of precipitation in Iran over the last half century. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 1–17.
9. Madadgar S., and Moradkhani H. 2014. Improved Bayesian multimodeling: Integration of copulas and Bayesian model averaging. *Water Resources Research*, 50(12): 9586-9603.
10. Ming X., Xu W., Li Y., Du J., Liu B., and Shi P. 2015. Quantitative multi-hazard risk assessment with vulnerability surface and hazard joint return period. *Stochastic environmental research and risk assessment*, 29(1), 35-44.
11. Mishra A.K., Singh V.P. 2010. A review of drought concepts. *Journal of Hydrology*, 391: 202-216.
12. Modarres R. 2008. Regional frequency distribution type of low flow in North of Iran by Lmoment. *Journal. Water Resour Manage*, 22: 823–841.
13. Nalbantis I., and Tsakiris, G. 2009. Assessment of hydrological drought revisited. *Water Resources Management*, 23(5): 881-897.
14. Nelsen R.B. 2006. *An introduction to copulas*. Springer, New York. 269p.
15. Saad C., El Adlouni S., St-Hilaire A. and Gachon P., 2015. A nested multivariate copula approach to hydrometeorological simulations of spring floods: the case of the Richelieu River (Quebec, Canada) record flood. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 29(1): 275-294.
16. Salvadori G., and De Michele C. 2007. On the use of copulas in hydrology: theory and practice. *Journal of Hydrologic Engineering*, 12(4): 369–380.
17. Sandoval C.A. 2009. Mixed distribution in low flow Frequency Analysis. *Journal of Hydrology*, 58(1): 247-253.
18. Shi P., Chen X., Qu S.M., Zhang Z.C., and Ma J.L. 2010. Regional frequency analysis of low flow based on L moments: Case study in Karst area, Southwest China. *Journal of Hydrologic Engineering*, 15(5): 370-377.
19. Sklar A. 1959. Fonctions de Repartition and Dimensions et Leurs Marges. *Publications de L'Institute de Statistique, Universite' de Paris, Paris*. 8: 229–231.
20. Smith R.E., and Bosch J.M. 1989. A description of the Westfalia catchment experiment to determine the effect on water yield of clearing the riparian zone and converting an indigenous forest to a eucalyptus plantation. *South African Forestry Journal*, 151(1): 26–31.
21. Yue S., Ouarda T.B.M.J., Bobee B. 2001. A review of bivariate gamma distributions for hydrological application. *Journal of Hydrology*, 246, 1–18.
22. Yue S., & Rasmussen P. 2002. Bivariate frequency analysis: discussion of some useful concepts in hydrological application. *Hydrological Processes*, 16(14): 2881-2898.
23. Zhang L., and Singh V.P. 2006. Bivariate flood frequency analysis using the copula method. *Journal of Hydrologic Engineering*, 11(2): 150-164.
24. Zhang Q., Chen Y. D., Chen X., and Li J. 2011. Copula-based analysis of hydrological extremes and implications of hydrological behaviors in the Pearl River basin, China. *Journal of Hydrologic Engineering*, 16(7): 598-607.

## Application of Archimedean and Extreme values Copula Functions for Multivariate Analysis of Low Flows in Dez Basin

F. Ahmadi<sup>1</sup> - F. Radmanesh<sup>2\*</sup> - G. A. Parham<sup>3</sup> - R. Mirabbasi Najaf Abadi<sup>4</sup>

Received: 18-09-2016

Accepted: 10-04-2017

**Introduction:** Hydrological phenomena are often multidimensional and very complex. Hence, the joint modeling of two or more random variables is required to investigate the probabilistic behavior of them. To this aim, the copulas can be efficiently utilized to derive multivariate distributions. In addition, the copula functions can quantify the dependence structure between correlated random variables. Estimation of low flow is necessary in different fields of hydrological studies such as water quality management, determination of minimum required flow at downstream for producing electricity and cooling purposes, design of intakes, aquaculture, design of irrigation systems and assessing the effect of long-term droughts on ecosystems. Low flows can be determined based on low flow indices. There are many types of low flow indices which among them the 7-days low flow with different return periods are more popular. Heretofore, numerous studies have been performed in the field of univariate analysis of river low flows, but the low flows of two river branches can be simultaneously analyzed using copula functions. Copula is a flexible approach for constructing joint distribution with different types of marginal distributions. Indeed, the copula is a function which links univariate marginal distributions to construct a bivariate or multivariate distribution function.

**Materials and Methods:** Hydrological phenomena often have different properties, where for their frequency analysis; they may be examined either individually or concurrently. These variables are not independent, rather they are interconnected and the change in one of them affects the other. Thus, the univariate frequency analysis can bring about some error due to neglecting the interdependence between these random variables. The copula is a function which joint the marginal distribution functions for constructing a bivariate or multivariate function. Development of copula functions is alleged to Sklar (1959) who described how univariate distribution can be jointed to form a multivariate distribution. Generally a copula function is a transfer of a multivariate function

from  $[-\infty, +\infty]^d$  to  $[0, 1]^d$ . This transfer separate marginal distributions from F function and the copula function, C, is only related to dependency among variables, therefore it present a full description of inner dependency structure. In other words, the Sklar's theorem states that for multivariate distributions, the inner dependency among the variables and univariate marginal distributions is separated and the dependency structure explained by copula function. The copula function divided into many families which among them then the Archimedean copula is widely used in multivariate analysis of hydrological events and also has an explicit formula for its cumulative form which is an important advantage in comparison with elliptical copula functions that have not explicit formula. Application of the copulas can be useful for the accurate multivariate frequency analysis of hydrological phenomena. There are many copula functions and some methods were proposed for estimating the copula parameters. Since the copula functions are mathematically complicated, estimating of the copula parameter is an effortful work. In this study, five different copula functions including, Ali - Mikhail - Haq, Clayton, Frank, Gal ambos and Gumbel-Hougaard were used for multivariate analysis of 7-days low flow in Dez basin.

**Results and Discussion:** In this study, the low flow of the Dez basin at junction of river branches during 1956-2012 were investigated using copula functions. For this purpose, firstly the 7-days low flow series of considered stations were extracted and then the homogeneity of the series was examined using Mann-Kendall test. The results showed that the 7-days low flow series of Dez basin are homogenous. In the next step, 11 different distribution functions were fitted on low flow series and the Logistic distribution was selected as the

1 and 2 - Ph.D Candidate and Associate Professor of Water Resources Engineering, Shahid Chamran University, Ahvaz, Iran

(\* - Corresponding Author, Email: Feridon\_radmanesh@yahoo.com)

3 - Professor, Department of Statistics, Shahid Chamran University, Ahvaz, Iran

4 - Assistant Professor, Water Engineering Department, Shahre Kord University, Shahre Kord, Iran

best fitted marginal distribution for considered stations. After specifying the marginal distributions, the Archimedean and Extreme value families of copula functions were used for multivariate frequency analysis of 7-days low flow. For this study, the best-fitted copula was specified in two ways. For the first specification, the nonparametric empirical copula was computed and compared with the values of the parametric copulas. The parametric copula that was closest to the empirical copula was defined as the most appropriate choice. The second specification was based on the statistical approach. The results indicated that for pair data of Sepid Dasht Sezar and Sepid Dasht Zaz stations, the Gumbel-Hougaard copula had the most accordance with empirical copula. In order to investigate the joint return periods, we used the joint return periods in two cases of AND and OR forms and also conditional joint return period.

**Conclusion:** Based on the obtained results from joint analysis of the low flow at upstream of the junction of two river branches, it was specified that two river branches of Sepid Dasht Sezar and Sepid Dasht Zaz may experience sever simultaneous drought events every 200 years.

**Keywords:** Conditional joint return period, Empirical copula, Homogenous, Joint return period, Marginal distribution